COMPORTAMIENTO EN EL INFINITO DE LAS SOLUCIONES DE UNA CLASE ABSTRACTA DE ECUACIONES DE EVOLUCIÓN

por

Gilberto Arenas Díaz[1], Henry Lamos Díaz[2] & ElderJesús Villamizar Roa[3]

Resumen

Arenas Díaz, G., H. Lamos Díaz & E. J. Villamizar Roa: Comportamiento en el infinito de las soluciones de una clase abstracta de ecuaciones de evolución. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **32** (122): 79-91, 2009. ISSN 0370-3908.

Basados en técnicas conocidas para el análisis de la existencia de soluciones débiles de las ecuaciones de Navier-Stokes, estudiamos varios aspectos del comportamiento en el infinito de las soluciones de una clase abstracta de ecuaciones de evolución en un espacio de Hilbert separable, la cual generaliza varios modelos de ecuaciones de la mecánica de los fluidos. En particular, se estudia la existencia y unicidad de soluciones globales, la existencia de un atractor global y la convergencia para las soluciones estacionarias asociadas.

Palabras clave: Atractor global, Comportamiento en el infinito de ecuaciones de evolución, condiciones de Carathéodory.

Abstract

Using some well knew techniques to analyze the existence of weak solutions for the Navier-

1 Universidad Industrial de Santander, Escuela de Matemáticas, Bucaramanga. Correo electrónico: garenasd@uis.edu.co

2 Universidad Industrial de Santander, Escuela de Estudios Industriales y Empresariales, Bucaramanga. Correo electrónico: hlamos@uis.edu.co

3 Universidad Industrial de Santander, Escuela de Matemáticas, Bucaramanga. Correo electrónico: ejvillami@uis.edu.co. AMS Classification 2000: Primaria: 35B40, 35B41. Secundaria: 35B60.

Stokes equations, we study several topics related with the long time behavior of solutions of an abstract class of evolutions equations in a separable Hilbert space, which generalizes several models of fluids mechanic. In particular we study the existence and uniqueness of weak solutions, as well as the existence of a global attractor and the convergence of solutions to the associated steady solutions.

Key words: Global atractor, Behaviour at infinity of evolution equations, Carathéodory conditions.

1. Problema abstracto

Estamos interesados en el estudio de soluciones de la siguiente clase abstracta de ecuaciones de evolución en un espacio de Hilbert separable X:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + A\mathbf{u} + B(\mathbf{u},\mathbf{u}) + B_1\mathbf{u} + B_2\mathbf{u} = \mathbf{f}, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \end{cases} \tag{1}$$

donde A, B_1 y B_2 son operadores lineales en X y B es un operador bilineal en X. Además, estos operadores satisfacen ciertas condiciones adicionales las cuales se describen a continuación: A es un operador autoadjunto, estrictamente positivo en X con dominio $D(A)$ e inversa compacta. Por lo tanto, existe una base ortonormal de X, denotada por $\{\mathbf{w}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, tal que $A\mathbf{w}_j = \lambda_j\mathbf{w}_j,\ j = 1,2,\dots \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \longrightarrow \infty$. El producto escalar y la norma en X son denotadas por $(\cdot,\cdot)$ y $|\cdot|$, respectivamente. Como $\{\mathbf{w}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal en X, para todo $\mathbf{u} \in X$ tenemos

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\mathbf{w}_j, \quad \text{donde} \quad c_j = (\mathbf{u},\mathbf{w}_j).$$

El dominio del operador A es dado por

$$D(A) = \left\{ \mathbf{u} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\mathbf{w}_j : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 c_j^2 < \infty \right\}.$$

Para $\mathbf{u} \in D(A)$ tenemos $A\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j c_j \mathbf{w}_j$. Gracias a esta caracterización se definen las potencias $A^\theta : D(A^\theta) \longrightarrow X,\ \theta \in \mathbb{R},\ 0 \leq \theta \leq 1$, con dominio

$$D(A^\theta) = \left\{ \mathbf{u} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\mathbf{w}_j : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2\theta} c_j^2 < \infty \right\},$$

por $A^\theta\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\theta c_j \mathbf{w}_j$ y $c_j = (\mathbf{u},\mathbf{w}_j)$. Denotamos por $X^\alpha = D\left(A^{\alpha/2}\right)$. Los espacios X^α son espacios de Hilbert con el producto interno definido por

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_\alpha = \left(A^{\alpha/2}\mathbf{u}, A^{\alpha/2}\mathbf{v}\right).$$

La norma asociada será denotada por $|\cdot|_\alpha$. También denotamos $((\mathbf{u},\mathbf{v})) = (\mathbf{u},\mathbf{v})_1$ y $|\cdot|_1 = \|\cdot\|$. La aplicación de dualidad entre espacios de Banach, será denotada por $\langle\cdot,\cdot\rangle$. El espacio dual de X^α es denotado por $X^{-\alpha}$. Así, identificando a X con su espacio dual, tenemos que $X^\alpha \hookrightarrow X \hookrightarrow X^{-\alpha}$, donde la injección es continua y con imagen densa.

Continuando con la descripción de los operadores dados en la ecuación (1), suponemos que en (1), $B : X^1 \times X^1 \to X^{-1}$ es un operador bilineal continuo, esto es,

$$|B(\mathbf{u},\mathbf{v})|_{-1} \leq \|B\|_1 \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in X^1,$$

y suponemos que existen extensiones continuas $B : X \times X^1 \to X^{-2},\ B : X^1 \times X \to X^{-2}$. Los operadores $B_i : X^1 \to X^{-1},\ i = 1,2$, son lineales y continuos, con extensiones continuas $B_i : X \to X^{-2}$ para $i = 1,2$, respectivamente. Además, suponemos que

$$\langle B(\mathbf{u},\mathbf{v}), \mathbf{v}\rangle = 0, \quad \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v} \in X^1, \tag{2}$$

$$\langle B_1\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = 0, \quad \forall\, \mathbf{u} \in X^1. \tag{3}$$

Las normas de los operadores B y $B_i,\ i = 1,2$, con valores en $X^{-\alpha}$ son denotadas por $\|B\|_\alpha$ y $\|B_i\|_\alpha$, respectivamente. De otro lado suponemos que $\mathbf{f}$ es una función dada, que $\mathbf{u}_0$ es la condición inicial del problema y que $\mathbf{u}$ es la incógnita del mismo.

El modelo (1) generaliza varias ecuaciones de la mecánica de los fluidos, como son las ecuaciones de fluidos micropolares, fluidos magneto-micropolares, ecuaciones de Boussinesq y Boussinesq generalizada, y las ecuaciones clásicas de Navier-Stokes, entre otras. Modelos relacionados a (1) han sido estudiados por varios autores, entre ellos, [3], [4], [8], [13] y [16]. En [13, pág. 113] se establece una formulación abstracta dada por la expresión

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + A\mathbf{u} + B(\mathbf{u},\mathbf{u}) + R\mathbf{u} = \mathbf{f}, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \end{cases} \tag{4}$$

donde R es un operador lineal tal que $A + R$ es coercitivo, y se discuten aspectos de existencia y unicidad de solución débil. En [8] se estudia el problema abstracto (4) con condiciones periódicas y se prueban resultados de existencia de soluciones periódicas fuertes. En [16] se discutió la existencia de soluciones débiles y fuertes del modelo estacionario asociado, esto es, el problema

$$A\mathbf{u} + B(\mathbf{u},\mathbf{u}) + B_1\mathbf{u} + B_2\mathbf{u} = \mathbf{f}, \tag{5}$$

y se analizaron propiedades cualitativas del conjunto de soluciones de (5).

En [3] se analizan algunos aspectos relativos a la existencia y unicidad de solución de (1) mediante métodos de Galerkin y resultados de compacidad en espacios de Nikolski.

En el presente artículo, analizamos varios aspectos relativos a la existencia, unicidad y comportamiento asintótico de las soluciones de (1); en particular, probamos la convergencia de las soluciones de (1) para la soluciones estacionarias del problema estacionario abstracto asociado (ecuación (5)). Además, probaremos la existencia de un atractor global para el sistema dinámico asociado a (1). Finalmente damos algunos ejemplos específicos de ecuaciones en derivadas parciales que pueden ser llevadas a la forma (1). El análisis de los resultados es basado en técnicas conocidas, principalmente en el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes (con densidad constante), con lo cual, los resultados presentados pueden ser considerados como una generalización natural de resultados ya conocidos para ciertos modelos de las ecuaciones de la hidrodinámica.

2. Soluciones débiles

En esta sección presentamos la definición de solución débil para el sistema (1) y discutimos algunos resultados de existencia y unicidad de solución débil para este sistema. El método utilizado para la obtención de la solución débil es el método de Galerkin, para lo cual se hace necesario dar la formulación débil del problema y la elección de los espacios funcionales adecuados. La existencia de solución del problema variacional involucra la formulación de los problemas aproximados y la existencia, por lo menos, de soluciones locales. Para tales fines, aplicaremos el Teorema de existencia de ecuaciones diferenciales ordinarias en las condiciones de Carathéodory (Teorema 1). La existencia de solución global para las aproximaciones se garantiza mediante el Teorema de prolongación (Teorema 3). Posteriormente, las acotaciones a priori permiten obtener un candidato a ser solución. Para el proceso del paso al límite se hace necesario fortalecer las convergencias y el uso de lemas de compacidad; en nuestro caso usaremos teoremas que involucran derivadas temporales fraccionarias. Para garantizar la unicidad, será necesario fortalecer las hipótesis sobre los operadores involucrados. Estos argumentos son estándar; sin embargo, haremos una descripción detallada de los mismos.

2.1. Condiciones de Carathéodory. Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$ con elementos $(t,\mathbf{x})$, $t \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función no necesariamente continua. Consideremos el problema de encontrar una función absolutamente continua $\mathbf{x}(t)$ definida en algún intervalo I de la recta, tal que $(t,\mathbf{x}(t)) \in \Omega$ para todo $t \in I$ y

$$\mathbf{x}'(t) = f(t,\mathbf{x}(t)) \quad \text{para casi todo } t \in I. \tag{6}$$

Si dicha función $\mathbf{x}(t)$ existe en el intervalo I, entonces se dice que $\mathbf{x}(t)$ es una solución de (6) sobre el intervalo I. Para $(t_0,\mathbf{x}_0) \in \Omega$, hay asociado a (6) un problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = f(t,\mathbf{x}(t)), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \tag{7}$$

es decir, el problema de encontrar una solución $\mathbf{x}(t)$ de (6) sobre I tal que $t_0 \in I$ y $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Entonces se dice que f satisface la condiciones de Carathéodory sobre Ω si:

a) $f(t,\mathbf{x})$ es medible en t para cada $\mathbf{x}$ fijo;
b) $f(t,\mathbf{x})$ es continua en $\mathbf{x}$ para cada t fijo;
c) para cada compacto $U \subset \Omega$ existe una función real integrable $g_U(t)$ tal que

$$|f(t,\mathbf{x}(t))| \le g_U(t), \qquad \forall (t,\mathbf{x}(t)) \in U.$$

Un aspecto matemático bastante interesante es estudiar la existencia y prolongación de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias en las condiciones de Carathéodory.

El siguiente resultado nos recuerda cuándo podemos garantizar la existencia de una solución para el problema (7). Para ello se necesita considerar el rectángulo

$$R = \left\{(t,\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t-t_0| \le a,\ |\mathbf{x}-\mathbf{x}_0| \le b\right\},$$

a , $b \in \mathbb{R}^+$, y entonces se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1 (Carathéodory)**.** *(*[9],[10]*). Sea $f : R \to \mathbb{R}^n$ una función que satisface las condiciones de Carathéodory sobre R. Entonces existe una solución $\mathbf{x}(t)$ de* (7) *sobre algún intervalo $|t-t_0| \le \beta$ ($\beta > 0$).*

Corolario 2. *Si Ω es un abierto en $\mathbb{R}^{n+1}$ y f satisface las condiciones de Carathéodory sobre Ω, entonces el problema* (7) *tiene solución para cualquier $(t_0,\mathbf{x}_0) \in \Omega$.*

Sean $\mathbf{x}(t)$ una solución del problema (7) sobre un intervalo I y $I \subset I_1$; entonces se dice que $\mathbf{x}(t)$ tiene una prolongación hasta I_1 si existe $\mathbf{x}_1(t)$ tal que $\mathbf{x}_1(t)$ es una solución de (7) sobre $I_1(t)$ y $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}(t)$ para todo $t \in I$.

El siguiente teorema da las condiciones que garantizan la prolongación de la solución.

Teorema 3. *([9],[10]). Sean Ω un abierto acotado conexo en $\mathbb{R}^{n+1}$ y f una función que satisface las dos primeras condiciones de Carathéodory sobre Ω. Supongamos que existe una función integrable $g(t)$ tal que $|f(t,\mathbf{x})| \leq g(t)$, $\forall (t,\mathbf{x}) \in \Omega$, y sea φ una solución de (6) sobre el intervalo abierto (a,b). Entonces:*

i) Existen $\varphi(a+0) = \lim_{t\to a^+} \varphi(t)$, $\varphi(b-0) = \lim_{t\to b^-} \varphi(t)$.

ii) Si $(b, \varphi(b+0)) \in \Omega$ entonces φ puede ser prolongada en $(a, b+\delta]$ para algún $\delta > 0$. Análogamente para el punto a.

iii) $\varphi(t)$ puede ser prolongada en un intervalo (γ,ω) tal que

$$(\gamma, \varphi(\gamma+0)),\ (\omega, \varphi(\omega+0)) \in \partial\Omega.$$

iv) Si f puede extenderse a la clausura $\bar{\Omega}$ de Ω de manera que la extensión preserve las propiedades de f, entonces $\varphi(t)$ puede ser prolongada a un intervalo $[\gamma,\omega]$ tal que

$$(\gamma, \varphi(\gamma+0)),\ (\omega, \varphi(\omega-0)) \in \partial\Omega.$$

Corolario 4. *Sea $\Omega = [0,T] \times \Gamma$, donde $0 < T < \infty$ y $\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| \leq b,\}$ para algún $b > 0$, y sea f una función que satisface las condiciones del Teorema 3. Sea $\varphi(t)$ una solución de*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = f(t,\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \qquad |\mathbf{x}_0| \leq b. \end{cases}$$

Supongamos que en cualquier intervalo I donde $\varphi(t)$ está definida, se tenga $|\varphi(t)| \leq G$, para todo $t \in I$, G independiente de I y $G < b$. Entonces φ tiene una prolongación en $[0,T]$.

2.2. Solución débil.

Si realizamos el producto entre la ecuación (1) por una función *test* $\mathbf{v}$, entonces motivados por la integración por partes entre 0 y T, podemos dar la siguiente definición de solución débil de (1).

Definición 5. Dado $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_1 \in L^2\left(0,T;X^{-1}\right)$, $\mathbf{f}_2 \in L^1(0,T;X)$, decimos que $\mathbf{u}$ es una solución débil del problema (1) con condición inicial $\mathbf{u}_0 \in X$, si $\mathbf{u} \in L^2\left(0,T;X^1\right) \cap L^\infty(0,T;X)$, $\mathbf{u} \in L^1(0,T;X^{-1}) + L^1(0,T;X)$ y

$$-\int_0^T (\mathbf{u},\mathbf{v}')\,dt + \int_0^T ((\mathbf{u},\mathbf{v}))\,dt + \\ + \int_0^T \langle B_0(\mathbf{u},\mathbf{u}),\mathbf{v}\rangle\,dt = \int_0^T \langle \mathbf{f}_1,\mathbf{v}\rangle\,dt \\ + \int_0^T (\mathbf{f}_2,\mathbf{v})\,dt + (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}(0)),$$

para todo $\mathbf{v} \in C^1([0,T];X) \cap C\left([0,T];X^1\right)$, con $\mathbf{v}(T) = 0$, donde $B_0(\mathbf{u},\mathbf{v}) = B(\mathbf{u},\mathbf{v}) + B_1\mathbf{v} + B_2\mathbf{v}$.

Teorema 6. *Bajo las hipótesis sobre B, B_1, B_2 y si $\|B_2\|_1 < 1$, entonces para todo $\mathbf{u}_0 \in X$ y para todo $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_1 \in L^2\left(0,T;X^{-1}\right)$, $\mathbf{f}_2 \in L^1(0,T;X)$, el problema (1) tiene al menos una solución débil en el sentido de la Definición 5. Además $\mathbf{u}$ es débilmente continua de $[0,T]$ en X.*

Demostración. El Teorema 6 generaliza el resultado de existencia de [3]. En [3] se presenta una prueba del Teorema 6 en el caso $\mathbf{f}_2 = 0$, a través del método de Galerkin y resultados de compacidad en espacios de Nikolski. Esto último para encontrar la convergencia fuerte de la sucesión de soluciones aproximadas, para la solución del problema infinito dimensional. En nuestro caso, usaremos resultados de compacidad que envuelven derivadas fraccionarias. Consideremos las aproximaciones de Galerkin

$$\mathbf{u}^k(t) = \sum_{i=1}^k c_{ik}(t)\mathbf{w}_i, \qquad k \in \mathbb{N},$$

donde los coeficientes c_{ik} son determinados de tal manera que $\mathbf{u}^k$ es una solución del problema de Cauchy

$$\mathbf{u}_t^k + A\mathbf{u}^k + P_k B_0(\mathbf{u}^k,\mathbf{u}^k) = P_k\mathbf{f}, \tag{8}$$

$$P_k\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}^k(0) = \mathbf{u}_0^k, \tag{9}$$

siendo P_k la proyección ortogonal asociada con el espacio vectorial cerrado V_k generado por $\{\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k\}$. Recordamos que como $X^1 \subset X \subset X^{-1}$, la proyección sobre X^{-1} se define a través de la extensión de Friedrich [6].

Nótese que (8) es equivalente con el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = G(t,\mathbf{g}),$$

donde $\mathbf{g} = (c_{1k}, \ldots, c_{kk})$ y $G = (G_1, \ldots, G_k)$ tiene componentes

$$G_i(t, \mathbf{g}) = -\lambda_i c_{ik} - \sum_{l=1}^{k} \langle B_1\mathbf{w}_l + B_2\mathbf{w}_l, \mathbf{w}_i\rangle c_{lk} - \sum_{\ell,j=1}^{k} \alpha_{j\ell}^{(i)} c_{\ell k} c_{jk} + \langle \mathbf{f}_1(t), \mathbf{w}_i\rangle + (\mathbf{f}_2(t), \mathbf{w}_i),$$

donde $\alpha_{j\ell}^{(i)} \in \mathbb{R}$. La condición inicial (9) es

$$c_{ik}(0) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_i), \quad i = 1, \ldots, k.$$

La existencia de la solución local del problema de Cauchy (8)–(9) la garantiza el teorema de Carathéodory.

De hecho, sea $D = [0, T] \times B$, $B = \{\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{g}| \le b\}$, $b > 0$, $c_{ik}(0) \in B$; entonces, fijado $\mathbf{g}$ tenemos que

$$-\lambda_i c_{ik} - \sum_{l=1}^{k} \langle B_1\mathbf{w}_l + B_2\mathbf{w}_l, \mathbf{w}_i\rangle c_{lk} - \sum_{\ell,j=1}^{k} \alpha_{j\ell}^{(i)} c_{\ell k} c_{jk}$$

no depende de t y $\langle \mathbf{f}_1(t), \mathbf{v}\rangle + (\mathbf{f}_2(t), \mathbf{v})$, es medible en t, $t \in [0, T]$, puesto que $\mathbf{f} \in L^2\left(0, T; X^{-1}\right) + L^1(0, T; X)$. Consecuentemente $G_i(t, \mathbf{g})$, $i = 1, ..., k$ es medible en t para cada $\mathbf{g}$ fijo.

Por otro lado, fijado t, la suma $\langle \mathbf{f}_1(t), \mathbf{v}\rangle + (\mathbf{f}_2(t), \mathbf{v})$, no depende de $\mathbf{g}$ y $(c_{1k}, \ldots, c_{kk}) = \mathbf{g} \in \mathbb{R}^k \mapsto \mathbf{u}^k = \sum_{i=1}^{k} c_{ik}\mathbf{w}_i \in (V_k, \Theta)$ es continua, donde Θ es la topología fuerte,

$$\mathbf{u}^k \in (V_k, \Theta) \longmapsto -\lambda_i c_{ik} - \sum_{l=1}^{k} \langle B_1\mathbf{w}_l + B_2\mathbf{w}_l, \mathbf{w}_i\rangle c_{lk} - \sum_{\ell,j=1}^{k} \alpha_{j\ell}^{(i)} c_{\ell k} c_{jk}$$

es continua. Por lo tanto, $G_i(t, \mathbf{g})$, $i = 1, ..., k$ es continua en $\mathbf{g}$ para cada t fijo.

Finalmente, como $\mathbf{g}$ varía en B, existe $c_B > 0$ tal que

$$\left| -\lambda_i c_{ik} - \sum_{l=1}^{k} \langle B_1\mathbf{w}_l + B_2\mathbf{w}_l, \mathbf{w}_i\rangle c_{lk} - \sum_{\ell,j=1}^{k} \alpha_{j\ell}^{(i)} c_{\ell k} c_{jk} \right| \le c_B,$$

$\forall \mathbf{g} \in B$, $i = 1, \ldots, k$, de donde

$$|G(t, \mathbf{g})| \le c_B + |\langle \mathbf{f}_1(t), \mathbf{w}_i\rangle| + |(\mathbf{f}_2(t), \mathbf{w}_i)| = m_i(t),$$

$\forall (t, \mathbf{g}) \in D$, siendo cada $m_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$, integrable en $[0, T]$. Así, por el Teorema de Carathéodory, existe una solución $\mathbf{u}^k(t)$ definida en $[0, T_k]$, $0 < T_k \le T$. Como veremos abajo, para cualquier intervalo I donde $\mathbf{u}^k(t)$ está definida, tenemos que

$$\left|\mathbf{u}^k(t)\right| \le M, \quad \forall t \in I, \quad M \text{ independiente de } k.$$

Esto equivale a decir que $|\mathbf{g}|^2 = \sum_{i=1}^{k} c_{ik}^2 \le M$. Por lo tanto, tomando B tal que $\sqrt{M} < b$, sigue del Corolario 4 que $\mathbf{u}^k$ tiene prolongamiento hasta $[0, T]$. Así, para cada k, existe una solución $\mathbf{u}^k$ de (8)–(9) definida en $[0, T]$.

2.2.1. Estimaciones a priori: Nótese que el problema (8)–(9) es equivalente a

$$(\mathbf{u}_t^k, \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}^k, \mathbf{v})) = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{v}\rangle + (\mathbf{f}_2, \mathbf{v}) - (B_0(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k), \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V_k, \tag{10}$$

$$\mathbf{u}^k(0) = P_k\mathbf{u}_0. \tag{11}$$

Tomando $\mathbf{v} = \mathbf{u}^k$ en (10), obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{u}^k|^2 + ||\mathbf{u}^k||^2 = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{v}\rangle + (\mathbf{f}_2, \mathbf{v}) - (B_0(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k), \mathbf{u}^k). \tag{12}$$

Observemos que las afirmaciones sobre los operadores B, B_1, B_2, implican

$$(B_0(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k), \mathbf{u}^k) = (B_2\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k),$$

y

$$\begin{aligned} &-(B_2\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k) + \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{v}\rangle + (\mathbf{f}_2, \mathbf{v}) \\ &\quad \le |B_2\mathbf{u}^k|_{-1}||\mathbf{u}^k|| + |\mathbf{f}_1|_{-1}||\mathbf{u}^k|| + |\mathbf{f}_2||\mathbf{u}^k| \\ &\quad \le ||B_2||_1||\mathbf{u}^k||^2 + \frac{\varepsilon}{2}|\mathbf{f}_1|_{-1}^2 + \frac{1}{2\varepsilon}||\mathbf{u}^k||^2 + |\mathbf{f}_2||\mathbf{u}^k|. \end{aligned}$$

Escogiendo $\varepsilon = \dfrac{1}{1 - ||B_2||_1} > 0$, obtenemos

$$c \equiv 2\left(1 - ||B_2||_1 - \frac{1}{2\epsilon}\right) = 1 - ||B_2||_1 > 0;$$

entonces, de (12) encontramos

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}^k|^2 + c||\mathbf{u}^k||^2 \le \varepsilon|\mathbf{f}_1|_{-1}^2 + |\mathbf{f}_2|(1 + |\mathbf{u}^k|^2),$$

y así

$$\frac{d}{dt}(1 + |\mathbf{u}^k|^2) + c||\mathbf{u}^k||^2 \le \varepsilon|\mathbf{f}_1|_{-1}^2 + |\mathbf{f}_2|(1 + |\mathbf{u}^k|^2). \tag{13}$$

En particular, tenemos que

$$\frac{d}{dt}(1 + |\mathbf{u}^k|^2) \le \varepsilon|\mathbf{f}_1|_{-1}^2 + |\mathbf{f}_2|(1 + |\mathbf{u}^k|^2). \tag{14}$$

Multiplicando (14) por $e^{-\int_0^t |\mathbf{f}_2(s)|ds}$ obtenemos

$$\frac{d}{dt}\{e^{-\int_0^t |\mathbf{f}_2(s)|ds}(1 + |\mathbf{u}^k|^2)\} \le \varepsilon|\mathbf{f}_1|_{-1}^2 e^{-\int_0^t |\mathbf{f}_2(s)|ds}. \tag{15}$$

Integrando (15) de 0 a T, obtenemos

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}^k(t)|^2 &\le 1 + |\mathbf{u}_0^k|^2 + C_1\textstyle\int_0^t |\mathbf{f}_1(s)|_{-1}^2 ds \\ &\quad + C_2\textstyle\int_0^t |\mathbf{f}_2(s)|(1 + |\mathbf{u}^k|^2) ds. \end{aligned} \tag{16}$$

Consecuentemente, la desigualdad de Gronwall implica que

$$\{\mathbf{u}^k\}_{k\geq 1} \quad \text{es acotada en } L^\infty(0,T;X). \quad (17)$$

Integrando (13) de 0 a $t \leq T$, obtenemos que

$$\{\mathbf{u}^k\}_{k\geq 1} \quad \text{es acotada en } L^2(0,T;X^1). \quad (18)$$

Consecuentemente, existe una subsucesión de $\{\mathbf{u}^k\}_{k\geq 1}$, que la denotaremos de la misma forma $\{\mathbf{u}^k\}_{k\geq 1}$ y $\mathbf{u} \in L^2(0,T;X^1) \cap L^\infty(0,T;X)$ tal que cuando $k \to \infty$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^k &\to \mathbf{u} \quad \text{débilmente} - * \text{ en } L^\infty(0,T;X), && (19)\\ \mathbf{u}^k &\to \mathbf{u} \quad \text{débilmente en } L^2(0,T;X^1). && (20) \end{aligned}$$

Dada una función ϕ de $\mathbb{R}$ en X^{-1}, denotamos por $\widehat{\phi}$ su transformada de Fourier y la derivada en t de orden γ de ϕ es dada por la transformada inversa de $(2i\pi t)^\gamma \widehat{\phi}$, esto es

$$\widehat{D_t^\gamma \phi(t)} = (2i\pi t)^\gamma \widehat{\phi}(t).$$

Como en [14], para $\gamma > 0$, definimos los espacios funcionales

$$\mathfrak{F}^\gamma\left(\mathbb{R}; X^1, X^{-1}\right) = \left\{\phi \in L^2\left(\mathbb{R}; X^1\right) : D_t^\gamma \phi \in L^2\left(\mathbb{R}; X^{-1}\right)\right\}.$$

El espacio $\mathfrak{F}^\gamma\left(\mathbb{R}; X^1, X^{-1}\right)$ es un espacio de Hilbert con la norma definida por:

$$\|\phi\|^2_{\mathfrak{F}^\gamma(\mathbb{R};X^1,X^{-1})} = \|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R};X^1)} + \left\||t|^\gamma \widehat{\phi}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R};X^{-1})}.$$

Como puede ser visto en [14], si las inmersiones $X^1 \hookrightarrow X \hookrightarrow X^{-1}$ son continuas, con $X^1 \hookrightarrow X$ compacta, para cualquier conjunto acotado M y cualquier $\gamma > 0$, la inmersión del conjunto

$$\mathfrak{F}^\gamma_M\left(\mathbb{R}; X^1, X^{-1}\right) = \left\{\phi \in \mathfrak{F}^\gamma\left(\mathbb{R}; X^1, X^{-1}\right) : \text{soporte de } \phi \subset M\right\}$$

en el espacio $L^2\left(\mathbb{R}; X^1\right)$, es compacta.

Para poder pasar al límite en (10)–(11) cuando $k \to \infty$ y obtener una solución $\mathbf{u}$ del problema (4), necesitamos fortalecer las convergencias de $\mathbf{u}^k$ para $\mathbf{u}$; en verdad, necesitamos mostrar que existe una subsucesión de $\left\{\mathbf{u}^k\right\}$ (la cual también será denotada por $\left\{\mathbf{u}^k\right\}$) tal que

$$\mathbf{u}^k \to \mathbf{u} \quad \text{fuertemente en} \quad L^2(0,T;X). \quad (21)$$

Para esto, siguiendo las ideas de [14], si definimos $\widetilde{\mathbf{u}}^k$ la extensión por cero de las funciones $\mathbf{u}^k$ y denotamos la transformada de Fourier de $\widetilde{\mathbf{u}}^k$ por $\widehat{\mathbf{u}}^k$, mostraremos que

$$\widetilde{\mathbf{u}}^k \text{ pertenece a un conjunto acotado de } \mathfrak{F}^\gamma\left(\mathbb{R}; X^1, X^{-1}\right) \quad (22)$$

para algún $\gamma > 0$, y así, usando los resultados de compacidad anteriormente mencionados, tenemos la convergencia fuerte (21).

Para probar (22), observamos que la ecuación (10) puede ser escrita como

$$\frac{d}{dt}\left(\widetilde{\mathbf{u}}^k, \mathbf{v}\right) = \langle \widetilde{G}^k, \mathbf{v}\rangle + \left(\mathbf{u}^k(0), \mathbf{v}\right)\delta_0 - \left(\mathbf{u}^k(T), \mathbf{v}\right)\delta_T, \quad (23)$$

$\forall \mathbf{v} \in V_k$, donde δ_0 y δ_T son distribuciones de Dirac en 0 y T, y $\widetilde{G}^k$ es una extensión por cero fuera de $[0,T]$, de

$$G^k = \mathbf{f} - A\mathbf{u}^k - B_0\left(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k\right).$$

De (23) tenemos que

$$2i\pi s\left(\widehat{\mathbf{u}}^k, \mathbf{v}\right) = \langle \widehat{G}^k, \mathbf{v}\rangle + \left(\mathbf{u}_0^k, \mathbf{v}\right) + \left(\mathbf{u}^k(T), \mathbf{v}\right)\exp(-2i\pi Ts),$$

$\forall \mathbf{v} \in V_k$ siendo $\widehat{\mathbf{u}}^k, \widehat{G}^k$ y las transformadas de Fourier de $\widetilde{\mathbf{u}}^k, \widetilde{G}^k$, respectivamente. Consecuentemente,

$$\begin{aligned} 2i\pi s\left|\widehat{\mathbf{u}}^k(s)\right|^2 &= +\langle \widehat{G}^k(s), \widehat{\mathbf{u}}^k(s)\rangle + \left(\mathbf{u}_0^k, \widehat{\mathbf{u}}^k(s)\right)\\ &\quad - \left(\mathbf{u}^k(T), \widehat{\mathbf{u}}^k(s)\right)\exp(-2i\pi Ts). \quad (24) \end{aligned}$$

Como $G^k \in L^1\left(0,T;X^{-1}\right)$, entonces

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} |\widehat{G}^k(s)|_{-1} \leq c, \quad \forall k.$$

De (24) deducimos que

$$|s|\left|\widehat{\mathbf{u}}^k(s)\right|^2 \leq c\left\|\widehat{\mathbf{u}}^k(s)\right\| \quad (25)$$

Note que $\left|\mathbf{u}^k(0)\right| \leq c$ y $\left|\mathbf{u}^k(T)\right| \leq c$.

Fijemos $\gamma < \dfrac{1}{4}$. Observemos que

$$|s|^{2\gamma} \leq c(\gamma)\frac{1+|s|}{1+|s|^{1-2\gamma}}, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

y usando (25), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |s|^{2\gamma}\left|\widehat{\mathbf{u}}^k(s)\right|^2 ds &\leq c_1\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left\|\widehat{\mathbf{u}}^k(s)\right\| ds}{1+|s|^{1-2\gamma}}\\ &\quad + c_2\int_{-\infty}^{\infty}\left\|\mathbf{u}^k(s)\right\|^2 ds. \quad (26) \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Schwarz, la identidad de Parseval y la consideración $\gamma < \frac{1}{4}$, podemos mostrar que las dos integrales del lado derecho de (26) convergen.

Consecuentemente, existe una subsucesión $\mathbf{u}^{k'}$ tal que

$$\mathbf{u}^{k'} \to \mathbf{u} \quad \text{fuertemente en} \quad L^2(0,T;X),$$

como queríamos demostrar.

2.2.2. Paso al límite. El proceso del paso al límite se realiza de manera estándar. De hecho, sea $r \in C^1([0,T])$ una función con $r(T)=0$, en (10) con $\mathbf{v}=r(t)\mathbf{w}^i$, $i \le k$; tenemos entonces

$$(\mathbf{u}_t^k,\mathbf{w}^i)r(t)+((\mathbf{u}^k,\mathbf{w}^i))r(t)+(B_0(\mathbf{u}^k,\mathbf{u}^k),\mathbf{w}^i)r(t) = (\mathbf{f}(t),\mathbf{w}^i)r(t).$$

Integrando de 0 a T, obtenemos

$$-\int_0^T(\mathbf{u}^k(t),\mathbf{w}^i)r'(t)dt+\int_0^T((\mathbf{u}^k(t),\mathbf{w}^i))r(t)dt+ + \int_0^T(B_0(\mathbf{u}^k(t),\mathbf{u}^k(t)),\mathbf{w}^i)r(t)dt = \int_0^T\{\langle\mathbf{f}_1(t),\mathbf{w}^i\rangle+(\mathbf{f}_1(t),\mathbf{w}^i)\}r(t)dt+(\mathbf{u}^k(0),\mathbf{w}^i)r(0). \tag{27}$$

Por la convergencia (19)–(21), cuando $k\to\infty$ tenemos

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T(\mathbf{u}^k(t),\mathbf{w}^i)r'(t)dt \;\to\; -\int_0^T(\mathbf{u}(t),\mathbf{w}^i)r'(t)dt,\\
&\int_0^T(\mathbf{u}^k(t),\mathbf{w}^i)r(t)dt \;\to\; \int_0^T(\mathbf{u}(t),\mathbf{w}^i))r(t)dt,\\
&(\mathbf{u}^k(0),\mathbf{w}^i)r(0)=(P_k\mathbf{u}_0,\mathbf{w}^i)r(0) \;\to\; (\mathbf{u}_0,\mathbf{w}^i)r(0).
\end{aligned}$$

Ahora mostraremos que cuando $k\to\infty$

$$\int_0^T(B_0(\mathbf{u}^k(t),\mathbf{u}^k(t)),\mathbf{w}^i)r(t)dt \to \int_0^T(B_0(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{w}^i)r(t)dt.$$

De hecho,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T[(B_0(\mathbf{u}^k(t),\mathbf{u}^k(t)),\mathbf{w}^i)r(t)-(B_0(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t)),\mathbf{w}^i)r(t)]dt\\
&\le \int_0^T|(B(\mathbf{u}^k(t),\mathbf{u}^k(t))-B(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t)),\mathbf{w}^i)r(t)|dt\\
&\quad+\int_0^T|(B_1\mathbf{u}^k(t)-B_1\mathbf{u}(t),\mathbf{w}^i)r(t)|dt\\
&\quad+\int_0^T|(B_2\mathbf{u}^k(t)-B_2\mathbf{u}(t),\mathbf{w}^i)r(t)|dt\\
&\le c\int_0^T|B(\mathbf{u}^k(t)-\mathbf{u}(t),\mathbf{u}^k(t))|_{-2}r(t)dt\\
&\quad+c\int_0^T|B(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}^k(t)-\mathbf{u}(t))|_{-2}r(t)dt\\
&\quad+c\int_0^T|B_1(\mathbf{u}^k(t)-\mathbf{u}(t))|_{-2}r(t)dt\\
&\quad+c\int_0^T|B_2(\mathbf{u}^k(t)-\mathbf{u}(t))|_{-2}r(t)dt\\
&\le \tilde{c}\left(\int_0^T|\mathbf{u}^k(t)-\mathbf{u}(t)|^2dt\right)^{1/2} \to 0.
\end{aligned}$$

Consecuentemente, tomando $k\to\infty$ en (27) tenemos

$$-\int_0^T(\mathbf{u}(t),\mathbf{w}^i)r'(t)dt+\int_0^T((\mathbf{u}(t),\mathbf{w}^i))r(t)dt + \int_0^T B_0(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{w}^i)r(t)dt = (\mathbf{u}_0,\mathbf{w}^i)r(0)+\int_0^T(\mathbf{f}(t),\mathbf{w}^i)r(t)dt. \tag{28}$$

Como los elementos de $C^1([0,T];X)\cap C([0,T];X^1)$ son límites de combinaciones lineales finitas de elementos de la forma $r(\cdot)\mathbf{w}^i$, la solución débil es obtenida de (28). $\square$

Observemos que el hecho de que $B(\mathbf{u}) := B(\mathbf{u},\mathbf{u})$ aplica X^1 sobre X^{-1} y la afirmación sobre B implican que
$$\|B(\mathbf{u})\|_{X^{-1}} \le c_0\|\mathbf{u}\|^2;$$
además, si $\mathbf{u} \in L^2(0,T;X^1)$, entonces $B(\mathbf{u}) \in L^1(0,T;X^{-1})$.

Como $B_i : X^1 \longrightarrow X^{-1}$, $i=1,2$, entonces $B_i\mathbf{u} \in L^1(0,T;X^{-1})$, consecuentemente, tenemos $\mathbf{u}_t \in L^1(0,T;X^{-1})+L^1(0,T;X)$. Así $\mathbf{u}\in C([0,T];X^{-1})$ y la condición inicial tiene sentido. Además, note que como $\mathbf{u}\in L^\infty(0,T;X)$ y es continua en $[0,T]$ con valores en X^{-1}, debido al Lemma 1.4, Cap. 3 de [14] $\mathbf{u}$ es débilmente continua con valores en X.

2.3. Condiciones para la unicidad. Presentaremos a continuación un resultado que da condiciones que garantizan la unicidad de la solución débil de (1).

Teorema 7. *Bajo las condiciones del Teorema 6, y si los operadores B y B_2 satisfacen las desigualdades*

$$|(B(\mathbf{u},\mathbf{v}),\mathbf{w})| \le c|\mathbf{u}|^{1/2}||\mathbf{u}||^{1/2}|\mathbf{v}|^{1/2}||\mathbf{v}||^{1/2}||\mathbf{w}|| \tag{29}$$
$$|(B_2(\mathbf{u}),\mathbf{v})| \le c|\mathbf{u}|^{1/2}||\mathbf{u}||^{1/2}|\mathbf{v}|^{1/2}||\mathbf{v}||^{1/2}, \tag{30}$$

donde c es una constante independiente de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}\in X^1$, entonces el problema (1) tiene una única solución débil en el sentido de la Definición 5.

Demostración. Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dos soluciones débiles de (1) y consideremos la diferencia $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Entonces $\mathbf{w}$ satisface la ecuación

$$\mathbf{w}_t + A\mathbf{w} = -B_1(\mathbf{w}) - B_2(\mathbf{w}) - B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - B(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$
$$\mathbf{w}(0) = 0.$$

Multiplicando formalmente la ecuación por $\mathbf{w}$, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{w}(t)|^2 + ||\mathbf{w}(t)||^2 &= -(B_1\mathbf{w}, \mathbf{w}) - (B_2\mathbf{w}, \mathbf{w}) - \\ &\quad (B(\mathbf{u}, \mathbf{w}), \mathbf{w}) - (B(\mathbf{w}, \mathbf{v}), \mathbf{w}) \\ &= -(B_2\mathbf{w}, \mathbf{w}) - (B(\mathbf{w}, \mathbf{v}), \mathbf{w}).\end{aligned}$$

Usando las desigualdades (29)–(30) se tiene

$$\begin{aligned}|(B_2\mathbf{w}, \mathbf{w})| &\leq c|\mathbf{w}|||\mathbf{w}|| \leq c_\eta|\mathbf{w}|^2 + \eta||\mathbf{w}||^2, \\ |(B(\mathbf{w}, \mathbf{v}), \mathbf{w})| &= |(B(\mathbf{w}, \mathbf{w}), \mathbf{v})| \leq c|\mathbf{w}|||\mathbf{w}||||\mathbf{v}|| \\ &\leq c_\eta||\mathbf{v}||^2|\mathbf{w}|^2 + \eta||\mathbf{w}||^2.\end{aligned}$$

Considerando $\eta = \frac{1}{4}$, encontramos

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{w}(t)|^2 + ||\mathbf{w}(t)||^2 \leq c|\mathbf{w}(t)|^2(1 + ||\mathbf{v}(t)||^2).$$

Integrando en el tiempo de 0 a $t \leq T$, obtenemos

$$|\mathbf{w}(t)|^2 + \int_0^t ||\mathbf{w}(\tau)||^2 d\tau \leq c\int_0^t |\mathbf{w}(\tau)|^2(1 + ||\mathbf{v}(\tau)||^2)d\tau.$$

Usando el Lema de Gronwall y utilizando el hecho de que $\mathbf{v} \in L^2(0, T; X^1)$, tenemos que $\mathbf{w} = 0$ y en consecuencia $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. □

3. Convergencia para las soluciones estacionarias

Sean $\mathbf{f} \in X^{-1} + X$ y $\mathbf{u}_\infty$ la solución del problema estacionario asociado con el problema (1), esto es, la solución de

$$A\mathbf{u} + B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + B_1\mathbf{u} + B_2\mathbf{u} = \mathbf{f}, \tag{31}$$

donde A, B, B_1 y B_2 satisfacen las condiciones dadas en la Sección 1.

Siguiendo [16] podemos demostrar que existe $\mathbf{u}_\infty \in X^1$ desde que consideremos $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_1 \in X^{-1}$, $\mathbf{f}_2 \in X$ y

$$\|\mathbf{u}_\infty\| \leq \frac{|\mathbf{f}_1|_{-1} + |\mathbf{f}_2|}{1 - \|B_2\|_1}. \tag{32}$$

Sea $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_\infty$. Entonces

$$\mathbf{w}_t + A\mathbf{w} = -B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + B(\mathbf{u}_\infty, \mathbf{u}_\infty) - B_1\mathbf{w} - B_2\mathbf{w}. \tag{33}$$

Multiplicando (33) por $\mathbf{w}$ tenemos,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\mathbf{w}|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 &= B(\mathbf{w}, \mathbf{u}_\infty, \mathbf{w}) - (B_2\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\ &\leq \|\mathbf{w}\|^2\left(\|B\|_1\|\mathbf{u}_\infty\| + \|B_2\|_1\right).\end{aligned}$$

Por (32) obtenemos

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{w}|^2 + \|\mathbf{w}\|^2\left((1 - \|B_2\|_1)^2 - \|B\|_1(|\mathbf{f}_1|_{-1} + |\mathbf{f}_2|)\right) \leq 0.$$

La desigualdad de Gronwall implica que

$$|\mathbf{w}(t)|^2 \leq |\mathbf{w}(0)|^2\exp(-\delta t), \quad \text{para } t > 0,$$

donde $\delta = \left((1 - \|B_2\|_1)^2 - \|B\|_1(|\mathbf{f}_1|_{-1} + |\mathbf{f}_2|)\right)$.

Esto significa que si B_2 satisface

$$1 - \|B_2\|_1 > \sqrt{\|B\|_1(|\mathbf{f}_1|_{-1} + |\mathbf{f}_2|)^2},$$

entonces tenemos que $|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\infty(t)| \to 0$ exponencialmente cuando $t \to \infty$ para cada solución $\mathbf{u}(t)$ de (1).

Con esto hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 8. *Si $1 - \|B_2\|_1 > \sqrt{\|B\|_1(|\mathbf{f}_1|_{-1} + |\mathbf{f}_2|)^2}$, entonces el problema estacionario relacionado con el problema* (1) *tiene una única solución $\mathbf{u}_\infty$. Por otra parte, si $\mathbf{u}(t)$ es la solución única de* (1), *entonces*

$$|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\infty| \leq |\mathbf{u}_0|^2\exp(-\delta t)$$

para todo $t > 0$. En particular, cuando $t \to \infty$, la solución del problema no estacionario converge en la norma de X a la solución única del problema estacionario.

4. Atractor global

En esta sección probamos la existencia de un atractor global para el semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ asociado al sistema (1), actuando sobre X. Este semigrupo es definido por $S(t) : X \longrightarrow X$ para cada $t \geq 0$, donde $S(t)\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(t)$, siendo $\mathbf{u}(t)$ la única solución débil del problema (1) con condición inicial $\mathbf{u}_0$, la cual es dada por los Teoremas 6 y 7. Consideramos que la fuerza externa $\mathbf{f}$ es independiente del tiempo y que $\mathbf{f}(\cdot) \in X$. Por otra parte, suponemos que los operadores B, B_1 y B_2 satisfacen las desigualdades

$$\begin{cases}|(B(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{w})| \leq c|\mathbf{u}|^{1/2}|A\mathbf{u}|^{1/2}\|\mathbf{v}\||\mathbf{w}|, \\ \mathbf{u} \in D(A), \mathbf{v} \in D(A^{1/2}), \mathbf{w} \in X,\end{cases} \tag{34}$$

$$|B_i(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq c|\mathbf{u}||\mathbf{v}|, \text{ para } i = 1, 2, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X. \tag{35}$$

Un atractor es un subconjunto $\mathcal{A}$ de un espacio de Banach X tal que:

1. Es invariante, es decir $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$, para todo $t \geq 0$.
2. Existe una vecindad abierta $\mathcal{V}$ tal que, para todo $\mathbf{u}$ en $\mathcal{V}$, $S(t)\mathbf{u}$ converge a $\mathcal{A}$ cuando $t \to \infty$, es decir, $\operatorname{dist}(S(t)\mathbf{u}, \mathcal{A}) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Decimos que $\mathcal{A}$ atrae uniformemente el conjunto $\mathcal{B}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe t_ε tal que, para $t \geq t_\varepsilon$, $S(t)\mathcal{B}$ está incluido en la unión de todos las bolas abiertas del radio ε con centro en $\mathcal{A}$.

Decimos que $\mathcal{A}$ atrae conjuntos acotados si atrae uniformemente cada conjunto acotado en X.

Un atractor en X que es compacto y atrae conjuntos acotados en X se llama un atractor global.

Decimos que un conjunto $\mathcal{B}$ en X es absorbente si para cada conjunto acotado $\mathcal{B}_0$ en X existe $t_1(\mathcal{B}_0)$ tal que, para todo $t \geq t_1(\mathcal{B}_0)$, $S(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$.

Para un subconjunto $\mathcal{B}$ de X se define el conjunto ω-límite de $\mathcal{B}$ así:

$$\omega(\mathcal{B}) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)\mathcal{B}}.$$

El principal resultado de esta sección lo da el siguiente teorema.

Teorema 9. *Consideremos a $\mathbf{f} \in X$ y supongamos que A, B, B_1, B_2 son como en el Teorema 7, y qué además B, B_i satisfacen (34) y (35). Entonces existe un único atractor global $\mathcal{A}$ para el semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ en X asociado con el problema (1). El atractor $\mathcal{A}$ es limitado en X^1, compacto y conexo en X y atrae conjuntos acotados en X.*

Demostración. Para demostrar este teorema utilizaremos el siguiente resultado.

Teorema 10. (Véase [13, p.p. 23].) *Sea X un espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo en X tal que para cada $t > 0$ el operador $S(t)$ sea continuo en X. Supóngase también que existe un subconjunto absorbente acotado $\mathcal{B}$ en X, y que los operadores $S(t)$ son uniformemente compactos para t grande. Entonces el conjunto ω-límite de $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$, es un atractor compacto que atrae subconjuntos acotados en X. Este subconjunto es el atractor acotado maximal en X.*

Nótese que usando los mismos argumentos de las acotaciones a priori, podemos ver que

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}|^2 + k_1\|\mathbf{u}\|^2 \leq k_2|\mathbf{f}|^2. \tag{36}$$

De (36), integrando de 0 a t tenemos

$$|\mathbf{u}(t)|^2 + k_1\int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|^2\,ds \leq |\mathbf{u}_0|^2 + k_2\int_0^t |\mathbf{f}(s)|^2\,ds.$$

Así, usando (36) y la desigualdad del Gronwall, obtenemos

$$|\mathbf{u}(t)|^2 \leq e^{-k_3 t}\left\{|\mathbf{u}_0|^2 + k_2\int_0^t e^{k_3 t}|\mathbf{f}(s)|^2\,ds\right\}.$$

En consecuencia, como $\mathbf{f} \in X$,

$$|\mathbf{u}(t)|^2 \leq e^{-k_3 t}\left\{|\mathbf{u}_0|^2 + \frac{k_2}{k_3}|\mathbf{f}|^2\left(e^{k_3 t} - 1\right)\right\},$$

de donde,

$$|\mathbf{u}(t)|^2 \leq e^{-k_3 t}|\mathbf{u}_0|^2 + \frac{k_2}{k_3}|\mathbf{f}|^2$$

para todo $t \geq 0$, y así,

$$\limsup_{t\to\infty}|\mathbf{u}(t)|^2 \leq \frac{k_2}{k_3}|\mathbf{f}|^2.$$

Sea $B(0,\rho)$ una bola en X centrada en cero y de radio $\rho > \rho_0$, $\rho_0^2 = \frac{k_2}{k_3}|\mathbf{f}|^2$. Entonces, para cada $\mathbf{u}_0 \in X$ existe $t_0 > 0$ tal que

$$\mathbf{u}(t) \in B(0,\rho), \quad \text{para todo} \quad t \geq t_0. \tag{37}$$

Por otra parte, para cualquier bola $B(0,r)$ en X existe $t_0 = t_0(r)$ tal que (37) se cumple para toda solución con dato inicial $\mathbf{u}_0 \in B(0,r)$. Esto prueba la existencia de un subconjunto absorbente en X para el semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Demostraremos ahora que los atractores globales están contenidos en un subconjunto acotado de X^1. Esta propiedad se sigue de la existencia de un conjunto absorbente acotado en X^1. Para probar la existencia de tal conjunto, obtenemos otras estimaciones de las soluciones débiles y después aplicamos el Lema de Gronwall.

Sea $\alpha > 0$ fijo. Tomando (36) e integrando por partes en el intervalo $(t, t+\alpha)$, con $\mathbf{f} \in X$, obtenemos

$$k_1\int_t^{t+\alpha}\|\mathbf{u}(s)\|^2 \leq \alpha k_2|\mathbf{f}|^2 + |\mathbf{u}(t)|^2.$$

Supongamos que (37) se cumple para algún $\rho > \rho_0$. Entonces obtenemos

$$\int_t^{t+\alpha}\|\mathbf{u}(s)\|^2 \leq \alpha\frac{k_2}{k_1}|\mathbf{f}|^2 + \frac{\rho^2}{k_1} \equiv \rho_1^2 \ \text{ para todo } \ t \geq t_0. \tag{38}$$

Usando (34)-(35) después de aplicar el producto escalar entre (1) y Au, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|A^{1/2}\mathbf{u}\right|^2 + |A\mathbf{u}|^2 &\le |\mathbf{f}|\,|A\mathbf{u}| + |(B(\mathbf{u},\mathbf{u}), A\mathbf{u})| \\ &+ |(B_1\mathbf{u}, A\mathbf{u})| + |(B_2\mathbf{u}, A\mathbf{u})| \\ &\le |\mathbf{f}|\,|A\mathbf{u}| + c_1|A^{1/2}\mathbf{u}|\,|A\mathbf{u}|^{3/2}\,|\mathbf{u}|^{1/2} + c_2\,|\mathbf{u}|\,|A\mathbf{u}| \\ &\le |\mathbf{f}|\,|A\mathbf{u}| + \frac{1}{8}|A\mathbf{u}|^2 + c_3\,|\mathbf{u}|^2\,\|\mathbf{u}\|^4 + c_2\,\|\mathbf{u}\|\,|A\mathbf{u}|\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|A^{1/2}\mathbf{u}\right|^2 + \frac{1}{2}|A\mathbf{u}|^2 &\le c_4\,|\mathbf{f}|^2 + c_2\,|\mathbf{u}|^2\,\|\mathbf{u}\|^4 + c_5\|\mathbf{u}\|^2 \\ &\le c_4\,|\mathbf{f}|^2 + c_6\left(|\mathbf{u}|^2\,\|\mathbf{u}\|^2 + 1\right)\|\mathbf{u}\|^2,\end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^2 \le g(t)\,\|\mathbf{u}\|^2 + c\,|\mathbf{f}|^2\,,$$

donde $g(t)$ es una función localmente integrable. Si $t \ge t_0$ (de modo que $|\mathbf{u}(t)| \le \rho$), de (38) tenemos

$$\int_t^{t+\alpha} \|\mathbf{u}\|^2\,ds \le \rho_1^2.$$

Por el Lema de Gronwall, encontramos

$$\|\mathbf{u}(t)\|^2 \le \left(\rho_1^2 + \int_t^{t+\alpha} |\mathbf{f}|^2\right)\exp\left(\int_t^{t+\alpha} g(s)\,ds\right),$$

para todo $t \ge t_0 + \alpha$. Esta desigualdad implica que el operador $S(t)$ es uniformemente compacto para t suficientemente grande. □

Observación 11. En el caso general del Teorema 9, cuando $\mathbf{f}$ depende del tiempo, podemos construir un semigrupo asociado al problema no autónomo (1), pero no en el espacio fase de la condición inicial. Debemos trabajar en un espacio de fase extendido $X \times \{\mathbf{f}^h\}_{h\in\mathbb{R}}$, donde $\mathbf{f}^h(t) = \mathbf{f}(t+h)$, y definimos la familia de operadores $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ por

$$S(t)(\mathbf{u}_0, \mathbf{g}) = (\mathbf{u}_{\mathbf{g}}(t,0)\mathbf{u}_0, \mathbf{g}^t), \quad t \ge 0, \quad \mathbf{g} \in \overline{\{\mathbf{f}^h\}_{h\in\mathbb{R}}}.$$

Esta familia forma un semigrupo sobre el conjunto $X \times \{\mathbf{f}^h\}_{h\in\mathbb{R}}$. Aquí $\mathbf{u}_{\mathbf{f}}(t,\tau)$ es un *proceso* asociado al problema (1).

5. Aplicaciones

En esta sección haremos algunos comentarios sobre aplicaciones de los resultados obtenidos en las secciones anteriores a ciertos modelos particulares de ecuaciones de evolución.

5.1. Modelo de fluidos micropolares. Como una aplicación de los teoremas dados anteriormente, consideramos inicialmente el modelo de fluidos micropolares. La dinámica de un fluido micropolar, en estado evolutivo, dentro de un dominio Ω de $\mathbb{R}^3$ se describe mediante el siguiente sistema de ecuaciones de evolución (ver por ejemplo [7], [15], [5] y referencias citadas allí).

$$\left\{\begin{aligned}&\mathbf{u}_t - (\nu+\nu_r)\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = 2\nu_r \operatorname{rot}\mathbf{w} + \mathbf{g}_1, \\ &\mathbf{w}_t - \sigma\Delta\mathbf{w} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{w} - \beta\nabla\operatorname{div}\mathbf{w} + 4\nu_r\mathbf{w} \\ &\qquad\qquad = 2\nu_r\operatorname{rot}\mathbf{u} + \mathbf{g}_2, \operatorname{div}\mathbf{u} = 0.\end{aligned}\right. \tag{39}$$

Las ecuaciones $(39)_1$, $(39)_2$ y $(39)_3$ describen las leyes de moméntum lineal, moméntum angular y conservación de masa, respectivamente; en estas ecuaciones, $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), u_3(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in \Omega$ representa la velocidad del fluido, $p \in \mathbb{R}^3$ la respectiva presión hidrostática y $\mathbf{w} = (w_1(\mathbf{x}), w_2(\mathbf{x}), w_3(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in \Omega$ la velocidad angular de rotación de las partículas. Adicionalmente, $\mathbf{g}_1$ y $\mathbf{g}_2$ representan campos de fuerzas externas; $\nu, \nu_r, \sigma, \beta$ son constantes positivas que describen características físicas del fluido (ν es la usual viscosidad newtoniana del fluido, ν_r es la viscosidad de microrotación, σ y β son constantes que dependen de nueva viscosidades relativas a la asimetría del tensor *stress*). La densidad del fluido es considerada, sin pérdida de generalidad, igual a uno. Asumimos que Ω es un conjunto acotado de $\mathbb{R}^3$ con frontera suave $\partial\Omega$. Consideramos las condiciones de frontera $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ sobre $\partial\Omega$. Observamos aquí que, para nuestro estudio, podemos suponer el caso de condiciones de frontera no nulas pero suficientemente regulares, de modo que podamos aplicar el Teorema de la traza en un espacios de Sóbolev y llevar el problema no homogéneo a un problema con condiciones de frontera nulas. Notemos que si el parámetro ν_r es cero, el sistema (39) se reduce al sistema clásico de las ecuaciones de Navier-Stokes, y el campo de velocidad angular $\mathbf{u}$ se torna independiente del campo de velocidad de microrrotación $\mathbf{w}$. Para ver detalles sobre la deducción física del modelo (39) invitamos al lector a consultar la referencia [2].

Denotamos con X el espacio de Hilbert $H \times L^2(\Omega)^3$, donde H es la clausura en la norma $L^2(\Omega)^3$ del conjunto

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{u} \in C_0^\infty(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{u} = 0\}.$$

La norma en X será denotada por $|\cdot|$.

Introducimos ahora los siguientes operadores:

$$\begin{aligned}A(\mathbf{U}) &= (-(\nu+\nu_r)P\Delta\mathbf{u}_1, -\sigma\Delta\mathbf{w}_1 - \beta\nabla\operatorname{div}\mathbf{w}_1) \\ &\equiv (A_1\mathbf{u}_1, A_2\mathbf{w}_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(\mathbf{U},\mathbf{V}) &= (P((\mathbf{u}_1\cdot\nabla)\mathbf{u}_2),(\mathbf{u}_1\cdot\nabla)\mathbf{w}_2),\\ B_1(\mathbf{U}) &= (0,0),\\ B_2(\mathbf{U}) &= (-2\nu_r\,\mathrm{rot}\,\mathbf{w}_1,-2\nu_r\mathrm{rot}\;\mathbf{u}_1+4\nu_r\mathbf{w}_1), \end{aligned}$$

para $\mathbf{U}=(\mathbf{u}_1,\mathbf{w}_1)\in D(A)$, $\mathbf{V}=(\mathbf{u}_2,\mathbf{w}_2)\in D(A)$. El operador P denota la proyección ortogonal de $L^2(\Omega)^3$ sobre el subespacio H; el operador $-P\Delta$ es el bien conocido operador de Stokes; el operador A es auto-adjunto, positivo, con dominio

$$D(A)=(W^{2,2}(\Omega)^3\cap V)\times(W^{2,2}(\Omega)^3\cap W_0^{2,2}(\Omega)^3),$$

donde $W^{2,2}(\Omega)$ y $W_0^{1,2}(\Omega)$ son los espacios de Sóbolev usuales, y V es la clausura de $\mathcal{V}$ en la norma de $W_0^{1,2}(\Omega)$; V puede ser caracterizado por $V=\{\mathbf{u}\in W_0^{1,2}(\Omega)^3:\mathrm{div}\,\mathbf{u}=0\}$ (vea por ejemplo [13]). Denotamos $X^\alpha=D(A^{\alpha/2})$ y $X_i^\alpha=D(A_i^{\alpha/2})$, $i=1,2$. Observemos que $X_2^\alpha=D(\Delta^{\alpha/2})$.

Con estas notaciones, el sistema (39) toma la forma (1) con $\mathbf{f}=(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2)$.

Podemos verificar que los operadores A, B, B_1 y B_2 satisfacen las condiciones descritas en la Sección 1.

Notemos en particular que $(P((\mathbf{u}_1\cdot\nabla)\mathbf{u}_2),\mathbf{u}_2)=0$ y $((\mathbf{u}_1\cdot\nabla)\mathbf{w}_2),\mathbf{w}_2)=0$, y así $(B(\mathbf{u},\mathbf{v}),\mathbf{v})=0$ para todo $\mathbf{u},\mathbf{v}\in X^1$.

Observemos que

$$\int_\Omega \mathrm{rot}\,\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}dx=\int_\Omega \mathbf{w}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}dx, \tag{40}$$

y que para cualesquiera $\mathbf{w}\in W_o^{1,2}(\Omega)$, $\mathbf{u}\in V$,

$$\begin{cases}\int_\Omega|\,\mathrm{rot}\,\mathbf{w}|^2dx=\int_\Omega|\nabla\mathbf{w}|^2dx \text{ y}\\ \int_\Omega|\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}|^2dx=\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}|^2dx\,.\end{cases} \tag{41}$$

De (40), (41) y la desigualdad de Schwartz concluimos que

$$4\nu_r(\mathrm{rot}\,\mathbf{w},\mathbf{u})\le 4\nu_r|\mathbf{w}|^2+\nu_r\|\mathbf{u}\|^2.$$

Ahora, por la desigualdad de Poincaré

$$|\mathbf{u}|\le\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|\mathbf{u}\|,\quad \text{para todo}\quad \mathbf{u}\in V,$$

donde $\lambda_1>0$ es el primer autovalor del operador de Stokes, y obtenemos la acotación

$$(\mathbf{g}_1,\mathbf{u})\le\frac{2}{\sqrt{\lambda_1}}|\mathbf{g}_1|_{-1}\|\mathbf{u}\|\le\frac{1}{\nu\lambda_1}|\mathbf{g}_1|_{-1}^2+\nu\|\mathbf{u}\|^2.$$

Consecuentemente,

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)|^2+(\nu+\nu_r)\|\mathbf{u}(t)\|^2\le4\nu_r|\mathbf{w}(t)|^2+\frac{1}{\nu\lambda_1}|\mathbf{g}_1(t)|_{-1}^2. \tag{42}$$

Similarmente,

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{w}(t)|^2+(c_a+c_d)\|\mathbf{w}(t)\|^2+4\nu_r|\mathbf{w}(t)|^2 \le\nu_r\|\mathbf{u}(t)\|^2+\frac{1}{(c_a+c_d)\lambda}|\mathbf{f}_2(t)|_{-1}^2. \tag{43}$$

De (42) y (43) obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left(|\mathbf{u}(t)|^2+|\mathbf{w}(t)|^2\right)+c_1\left(\|\mathbf{u}(t)\|^2+\|\mathbf{w}(t)\|^2\right) \le c_2\left(|\mathbf{f}_1(t)|_{-1}^2+|\mathbf{f}_2(t)|_{-1}^2\right),$$

que equivale a la desigualdad (13). En consecuencia, se obtiene la existencia de solución débil dada por el Teorema 6. Las condiciones de los Teoremas 7, 8 y 9 también se verifican. Omitimos aquí los detalles.

Observación 12. En el análisis anterior sobre el modelo (39), por simplicidad en la notación, hemos considerado $\mathbf{f}\in L^2(0,T;X^{-1})$; sin embargo, los resultados son validos si consideramos $\mathbf{f}=\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2$, con $\mathbf{f}_1=(\mathbf{g}_1^1,\mathbf{g}_2^1)$, $\mathbf{f}_2=(\mathbf{g}_1^2,\mathbf{g}_2^2)$, donde $\mathbf{f}_1\in L^2(0,T;X^{-1})$ y $\mathbf{f}_1\in L^1(0,T;X)$ conforme al Teorema 6.

5.2. Ecuaciones de evolución de Navier-Stokes.

Como otra aplicación de los Teoremas 6, 7, 8 y 9, consideramos las ecuaciones clásica de Navier-Stokes en estado evolutivo:

$$\begin{cases}\mathbf{u}_t-\nu\Delta\mathbf{u}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\nabla p &= \mathbf{g},\text{ en }\Omega,\\ \mathrm{div}\,\mathbf{u} &= 0,\text{ en }\Omega,\\ \mathbf{u} &= \boldsymbol{\phi},\text{ sobre }\partial\Omega,\end{cases} \tag{44}$$

donde $\mathbf{g}\in H,\boldsymbol{\phi}\in W^{1,3/2}(\partial\Omega)$ (el espacio de las funciones traza en $W^{1,2}(\Omega))^3$ con $\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{\phi}\cdot\mathbf{n}ds=0$, $\mathbf{n}$ siendo la normal exterior sobre $\partial\Omega$). Notemos que si consideramos $\boldsymbol{\phi}\in W^{1,3/2}(\partial\Omega)$, para todo $\delta>0$ existe una extensión G de $\boldsymbol{\phi}$, con $G\in W^{2,2}(\Omega)$, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\phi}=0$, $G=\boldsymbol{\phi}$ sobre $\partial\Omega$, tal que para todo $\mathbf{u}\in V$,

$$\begin{aligned}|(\mathbf{u}\cdot\nabla G,\mathbf{u})| &\le \delta\|\boldsymbol{\phi}\|_{W^{1,3/2}(\partial\Omega)}|\nabla\mathbf{u}|^2,\\ \|G\|_{W^{2,2}(\Omega)} &\le C(\delta)\|\boldsymbol{\phi}\|_{W^{1,3/2}(\partial\Omega)}.\end{aligned}$$

Sea $U=\mathbf{u}-G$ y definamos

$$\begin{aligned} AU &= -\nu P\Delta U,\\ B(U,U) &= P((U\cdot\nabla)U),\\ \mathbf{f} &= \mathbf{g}+\nu\Delta G-(G\cdot\nabla)G,\\ B_2U &= P((U\cdot\nabla)G)+P((G\cdot\nabla)U),\\ B_1U &= 0.\end{aligned}$$

Usamos la notación P para indicar el operador proyección $P:\mathbf{L}^2(\Omega)\to H$. Con estas notaciones, obtenemos para el problema (44) la ecuación abstracta

$$U_t + AU + B(U,U) + B_1U + B_2U = \mathbf{f},$$

y sobre esta ecuación aplicamos los resultados estudiados en las secciones anteriores.

5.3. Otros modelos. Existen otros modelos de la hidrodinámica que pueden llevarse a la forma (1). A continuación mencionamos dos de ellos: el modelo de la ecuaciones de Boussinesq y el sistema de fluidos magneto-micropolares. A continuación haremos una breve descripción de dichos modelos.

5.3.1. Ecuaciones de Boussinesq. Consideremos un fluido viscoso dentro de un dominio Ω de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Las ecuaciones de Boussinesq para convección, en el caso evolutivo, describen la evolución de la temperatura y el campo de velocidad de un fluido newtoniano viscoso incompresible. Debido a la aproximación de Boussinesq (**Chandrasekhar** [1]), variaciones de la densidad pueden ser ignoradas excepto en el término gravitacional, en el que tales variaciones pueden ser asumidas como proporcionales a las variaciones de temperatura. Entonces, en forma adimensional, la relación entre el campo de velocidad $\mathbf{u}(x,t) \in \mathbb{R}^n$, la presión $p(x,t) \in \mathbb{R}$ y la temperatura $\theta(x,t) \in \mathbb{R}$, puede ser descrita por el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \dfrac{1}{\rho}\nabla p = \beta\theta\mathbf{g} + \mathbf{f}_1, \ x \in \Omega\times(0,T), \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \ x \in \Omega\times(0,T), \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial t} - \chi\Delta\theta + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\theta = \mathbf{f}, \ x \in \Omega\times(0,T), \end{cases} \tag{45}$$

donde $\mathbf{g}$ representa el campo gravitacional en x, $\mathbf{f}$ la referencia de temperatura y $\mathbf{f}_1$ otra fuerza externa que actúa en el sistema; ρ, ν, β y χ son constantes físicas positivas que representan, respectivamente, la densidad, la viscosidad cinemática, el coeficiente de expansión de volumen y la conductancia térmica. La ecuación $(45)_1$ representa la ley de conservación de momento, la ecuación $(45)_2$ indica la incompresibilidad del fluido y la ecuación $(45)_3$ representa la ecuación de evolución para la temperatura. Esta ecuación se completa debidamente con las respectivas condiciones iniciales y de frontera. El modelo estacionario asociado es considerado en [17] y referencias allí citadas.

5.3.2. Sistemas de fluidos magneto-micropolares. Consideraremos el sistema de fluidos magneto-micropolares sobre Ω [7]. Este sistema es acoplado entre el sistema de fluidos micropolares (39), con la fuerza de Lorentz, ecuaciones de Maxwell y ley de Ohm, y viene dado por el siguiente problema de valor inicial y de frontera:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - (\nu+\chi)\Delta\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla\pi + \dfrac{1}{\mu}B\times\operatorname{rot}B = \chi\operatorname{rot}\omega, & \text{en} \quad \Omega\times(0,T), \\ \mathbf{w}_t - \gamma\Delta\mathbf{w} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w} + 2\chi\mathbf{w} - (\alpha+\beta)\nabla\operatorname{div}\mathbf{w} = \chi\operatorname{rot}\mathbf{u}, & \text{en} \quad \Omega\times(0,T), \\ B_t + \dfrac{1}{\sigma\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}B - \operatorname{rot}(\mathbf{u}\times B) = 0, & \text{en} \quad \Omega\times(0,T), \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \qquad \operatorname{div}B = 0, & \text{en} \quad \Omega\times(0,T), \\ \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot B = 0, \quad \operatorname{rot}B\times\mathbf{n} = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega\times(0,T), \\ \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{w}(x,0) = \mathbf{w}_0, \quad B(x,0) = B_0, & \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{46}$$

donde Ω es un dominio en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{u}$, π y $\mathbf{w}$ representan, respectivamente, la velocidad angular, la presión y la velocidad microrrotacional de las partículas, $B = (B_1, B_2, B_3)$ es la densidad del flujo magnético y $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario sobre $\partial\Omega$; las constantes χ, ν, μ, γ, σ, α y β son positivas y representan las características físicas del fluido; en particular, $\mu > 0$ es la permeabilidad y $\sigma > 0$ es la conductividad del fluido.

Agradecimientos: Este trabajo fue financiado parcialmente por el DIF-Ciencias de la Universidad Industrial de Santander. **E. J. Villamizar-Roa** agradece a Colciencias el apoyo financiero dado en el marco del Proyecto BID, III etapa.-

Referencias

[1] **S. Chandrasekhar**. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford at the Clarendon Press, (1961).

[2] **A. C. Eringen**. "Theory of micropolar fluids", *J. Math. Mech.*, **16**, 1–8, (1966).

[3] **E. Fernández-Cara, F. Guillén-González & M. A. Rojas-Medar.** *Una formulación abstracta para algunas ecuaciones de la mecánica de los fluidos incompresibles*, 58º Seminário Brasileiro de analise, Campinas, S.P. (2003).

[4] **D. Haragus**, *Equations du type Navier-Stokes*, Monografia matemática, No. **49**, Universitatea de Vest Timisoana, (1994).

[5] **L. C. F. Ferreira & E. J. Villamizar-Roa**, "On the Existence and Stability of Solutions for the Micropolar Fluids in exterior domains", *Math. Methods Appl. Sci.*, **30**, No. 10, 1185–1208, (2007).

[6] **J. L. Lions & E. Magenes**, *Problèmes aux limites nonhomegenes et applications. I, II, VI.* Dunod, Paris,(1968).

[7] **G. Łukaszewicz**, *Micropolar Fluids. Theory and Applications, Modelling and Simulation in Science, Engineering and Technology*, Birkäuser, Boston, Basel, Berlin, (1999).

[8] **G. Łucaszewicz, E. E. Ortega-Torres & M. A. Rojas-Medar**, "Strong periodic solutions for a class of abstract evolutions equations", *Nonlinear Analysis*, Theory and Aplications, **54** 6, 1045–1056, (2003).

[9] **L. A. Medeiros & P. H. Rivera**, *Espaços de Sobolev e equações diferenções parções*, Textos de Métodos Matemáticos, No. 9, UFRJ, (1975).

[10] **M. Milla–Miranda**, *Prolongación de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias*, Notas UFRJ, 155–171, (1980).

[11] **J. Simon**, "Compact Sets in the Space $L^p(0, T; B)$", *Ann. Mat. Pura Appl.*, Serie IV, Vol. 146, p.p. 65–96 (1987).

[12] **J. Simon**, *Existencia de solución del problema de Navier-Stokes con densidad variable*, Lectures at the University of Sevilla, Spain, (1989).

[13] **T. Temam**, *Infinite Dimensional Dynamical System in Mechanics and Physics*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, (1997).

[14] **T. Temam**, *Navier-Stokes Equations (Revised Edition)*, North-Holland, (1979).

[15] **E. J. Villamizar-Roa & M. A. Rodríguez-Bellido**, "Global Existence and Exponential Estability for the Micropolar Fluid", *Mathematik and Physik ZAMP*, **58**, 1–20, (2007).

[16] **E. J. Villamizar-Roa, M. A. Rodríguez-Bellido & M. A. Rojas-Medar**, "Some Properties of a Class of Abstract Stationary Equations", *Nonlinear Analysis, Theory and Aplications,* **64**, 2203–2214, (2006).

[17] **E. J. Villamizar-Roa, M. A. Rodríguez-Bellido & M. A. Rojas-Medar**, "The Boussinesq System with Mixed nonsmooth Boundary Data", *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **343**, No. 3, 191–196, (2006).

Recibido el 19 de marzo de 2007

Aceptado para su publicación el 21 de diciembre de 2007