MEMORIAS

TERCERA ESCUELA DE VERANO EN GEOMETRIA DIFERENCIAL, ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES Y ANALISIS NUMERICO

1995

Conferencias

EDITORES:
JOSE F. ESCOBAR
JAIME I. LESMES

ACADEMIA COLOMBIANA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES
COLECCION MEMORIAS No. 7

ACADEMIA COLOMBIANA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES
COLECCION MEMORIAS No. 7

MEMORIAS TERCERA ESCUELA DE VERANO EN GEOMETRIA DIFERENCIAL, ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES Y ANALISIS NUMERICO

1995
Conferencias

Editores:
José F. Escobar
Departament of Mathematics
Cornell University

Jaime I. Lesmes
Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia

SANTAFE DE BOGOTA, D.C.
1996

© **Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales**
Cra. 3A No. 17-34, Piso 3o. - Apartado 44763 - Fax (571) 2838552
E.Mail accefyn@colciencias.gov.co

© José F. Escobar
Jaime Lesmes

Reservados todos los derechos. Este libro no puede ser reproducido total o parcialmente sin autorización.

Presidente de la Academia : Luis Eduardo Mora-Osejo
Director de *Publicaciones* : Santiago Díaz-Piedrahita
Comité Editorial : Eduardo Brieva Bustillo
Período 1994 - 1996 : Gonzalo Correal Urrego
Hernando Dueñas Jiménez
Paulina Muñoz de Hoyos
Gerardo Pérez Gómez
Víctor Samuel Albis González

Esta publicación ha sido realizada con la colaboración financiera de COLCIENCIAS, entidad cuyo objetivo es impulsar el desarrollo científico y tecnológico de Colombia.

ISBN: 958-9205-24-0
ISBN: 958-9205-21-6 (Obra completa)

Clasificación Dewey: 516.69
Materias: 1. GEOMETRIA DIFERENCIAL 2. ECUACIONES DIFERENCIALES 3. ANALISIS NUMERICO. I. Escobar, José F. II. Lesmes, Jaime Y, III. Tit. IV Serie

El levantamiento de textos de este libro fue realizado con el paquete AMSTEX de la *American Mathematical Society*

Autoedición e Impresión:
EDITORA GUADALUPE LTDA.
Apartado 29765 - Tel.: 269 07 88, Santa Fe de Bogotá, D.C.
Impreso en Colombia/Printed in Colombia

CONTENIDO

Pág.

Presentación. v
Agradecimientos vii
Cursillistas ix
Conferencistas xi
Ponentes xiii
Lista de participantes xv

Artículos de las Conferencias

Geometría Diferencial
Jianguo Cao:
An isoperimetric comparison theorem for PL-manifolds of non-positive curvature 1
José F. Escobar:
Negative scalar curvature and totally geodesic boundary on a compact Riemannian manifold 9
Alexandre Freire:
Weak solutions of the harmonic map flow and related problems 15
Bruce Solomon:
Tantrices de lazos planos proyectivos 29

Ecuaciones Diferenciales Parciales
Alfonso Castro:
Ecuaciones diferenciales elípticas semilineales 45
Jorge Cossio:
Múltiples soluciones para un problema elíptico semilineal 53
Rafael José Iório, Jr., Felipe Linares and Márcia A. G. Scialom:
Living under the Sobolev barrier 61

Pág.

Análisis Numérico

Pascal Joly:
A method for solving PDS's by using wavelet packet bases 75

Pascal Joly and Olivier Perlot:
Polynomial preconditions for the CG method on the CG2 83

Alfred H. Schatz:
Pointwise error estimates and asymptotic error expansion inequalities for the finite element method on irregular grids 91

Esteban G. Tabak:
Un modelo bidimensional para flujos atmosféricos 97

Presentación

La teoría de las ecuaciones en derivadas parciales constituye uno de los dominios más amplios y variados de toda la Matemática actual. Sus vínculos con otras ramas de las matemáticas, así como sus lazos simbióticos con la Física y las ciencias aplicadas son cada vez más estrechos.

Notablemente, desde hace cerca de dos décadas, el campo del Análisis Geométrico ha adquirido un enorme impulso; en él se usan sistemáticamente los métodos de las ecuaciones diferenciales parciales para la solución de problemas geométricos y, recíprocamente, las consideraciones geométricas han facilitado y enriquecido la solución de problemas en ecuaciones diferenciales parciales.

Considerando la existencia en Colombia de grupos de investigación con trabajo activo en problemas tanto de geometría diferencial como de ecuaciones diferenciales parciales, los vínculos mantenidos por esos grupos con destacados investigadores del exterior y la motivación resultante de la realización en Bogotá del II Coloquio Latinoamericano de Análisis en noviembre de 1992, que contó con la presencia de algunos matemáticos de primer nivel internacional, se organizó en la Universidad del Valle la "Escuela de Verano en Geometría Diferencial y Ecuaciones Diferenciales Parciales", que tuvo lugar en junio de 1993 en la ciudad de Cali.

En vista del buen resultado de la Escuela de Verano en Cali, se decidió realizar otra Escuela de Verano en 1994. Además, teniendo en cuenta el impulso significativo alcanzado en nuestro país durante los últimos años por el Análisis Numérico, estrechamente relacionado con las ecuaciones diferenciales y con los campos de aplicación de las matemáticas, se acordó ampliar a esta área el cubrimiento de la segunda Escuela de Verano. Esta última tuvo lugar en la Universidad Nacional, sede Medellín, en julio y agosto de 1994.

En reunión celebrada al final de la segunda Escuela, se convino programar la III Escuela de Verano en Geometría Diferencial, Ecuaciones Diferenciales Parciales y Análisis Numérico en la Universidad de los Andes a fin de consolidar los logros de las Escuelas anteriores, particularmente el conocimiento y la colaboración entre los grupos que trabajan en temas afines en diferentes universidades del país y del extranjero. Así se ha logrado romper la sensación de aislamiento que frecuentemente se tiene en nuestro medio. Acordes con este

propósito, los organizadores tuvieron claro desde un principio cuáles deberían ser las líneas directrices del evento, a saber: concentración en las tres áreas objeto de la Escuela, procurando que los temas a tratar en geometría diferencial y en análisis numérico estuvieran interrelacionados con las ecuaciones diferenciales parciales; cursillos (uno en cada área) que, a la vez que facilitaran la penetración en el tema, proporcionaran una visión, así fuera introductoria, del carácter de la investigación en el área; conferencias que mostraran progresos y tendencias actuales en los respectivos campos; realización de sesiones de comunicaciones cortas para presentar resultados de trabajos o investigaciones recientes de los participantes.

Fue así como desde agosto de 1994, los organizadores contactaron cerca de 25 especialistas de varios países, para invitarlos a dictar o bien alguno de los cursillos, o bien una o dos conferencias. Igualmente, se hizo una convocatoria a nivel nacional, para propuestas de presentación tanto de conferencias como de comunicaciones, las cuales se someterían a un proceso de selección.

La receptividad a las invitaciones fue bastante alta. Luego de sortear diversos inconvenientes, habituales en esta clase de eventos, especialmente incompatibilidades de fechas, se ofrecieron los tres cursillos, 19 conferencias y 14 comunicaciones cortas.

Durante el desarrollo de la Escuela se entregaron a cada uno de los asistentes a los cursillos fotocopias de las notas que los profesores prepararon. Copias de estas notas se encuentran en la biblioteca del Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes.

Todos los conferencistas y ponentes fueron invitados a enviar un artículo sobre su conferencia o comunicación, para ser sometido a publicación en las Memorias de la Escuela; la mayoría de ellos respondió positivamente. Los artículos fueron sometidos a arbitraje; agradecemos la colaboración de los colegas que actuaron como jueces.

En este volumen recogemos los artículos de las conferencias. Los artículos de las comunicaciones aparecerán en una publicación aparte.

Sea éste el punto para expresar nuestro sincero agradecimiento a la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, por haber acogido este volumen en su Colección de Memorias; e igualmente a los conferencistas por el arduo trabajo de escribir sus conferencias para las memorias.

José F. Escobar
Jaime I. Lesmes

Ithaca, NY
Santafé de Bogotá,
junio de 1996

Agradecimientos

Los organizadores agradecen muy sinceramente a las entidades que hicieron posible la realización de este evento:

NSF (National Science Foundation)
COLCIENCIAS (Fondo Colombiano de Investigaciones Científicas)
ICFES (Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior)
Universidad de los Andes
Universidad Nacional de Colombia
Universidad del Valle
Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
Sociedad Colombiana de Matemáticas
Fundación Suramericana
Fundación MAZDA para el Arte y la Ciencia
Banco Ganadero

Igualmente, agradecen a las siguientes entidades, que de alguna manera u otra colaboraron para el éxito de la Escuela:

Grupo K-T-DRA Prentice Hall
McGraw Hill Interamericana S.A.
Coca-Cola
Federación Nacional de Cafeteros.

Cursillistas

MARIO J. MICALLEF
University of Warwick
Selected Topics in Minimal Surfaces ("Cátedra Suramericana")

GUSTAVO PONCE
University of California at Santa Barbara
Sobre el Problema de Valores Iniciales Asociado a la Ecuación de Onda

ESTEBAN TABAK
Courant Institute, NYU
Métodos Numéricos para Ecuaciones Hiperbólicas no Lineales

Conferencistas

CAO JIANGUO
Cornell University, USA

An isoperimetric comparison theorem for PL*-manifolds of non-positive curvature*

CASTRO ALFONSO
University of North Texas,USA

Ecuaciones diferenciales elípticas semilineales

COSSIO BETANCOUR JORGE IVÁN
Universidad Nacional de Colombia, Medellín

Múltiples soluciones para un problema elíptico semilineal

ESCOBAR VELÁSQUEZ JOSÉ FERNANDO
Cornell University, USA

Negative scalar curvature and totally geodesic boundary on a compact Riemannian manifold

FREIRE ALEXANDRE
University of Tenessee at Knoxville, USA

Weak solutions of the harmonic map flow and related problems

IÓRIO RAFAEL
IMPA, Brasil

Living under the Sobolev barrier

JOLY PASCAL
Université de Paris 6, France

A method for solving PDS *'s by using wavelet packet bases*

Polynomial preconditions for the CG *method on the* CG2

MICALLEF MARIO
University of Warwick, UK

Minimal surfaces in flat tori

POLLACK DANIEL
University of Chicago, USA

The geometry of the spaces of singular Yamabe metrics

SCHATZ ALFRED H.
Cornell University, USA

An introduction to some problems in the numerical analysis of partial differential equations

Pointwise error estimates and asymptotic error expansion inequalities for the finite element method on irregular grids

SCOTT SIMON
Oxford University, UK

Determinants and functorial QFT

SIMON LEON Standford University, USA

Minimal surfaces

SOLOMON BRUCE
Indiana University, USA

Tantrices de lazos planos proyectivos

TORO TATIANA
University of Chicago, USA

Medida armónica en dominios de frontera localmente plana

Ponentes

CRUZ SAMPEDRO JAIME
Universidad de las Américas, México.

Perturbations of Schrödinger operators with Wigner-von Neumann potentials

ECHEVERRY LUZ MYRIAM
Universidad de los Andes, Bogotá

Elementos finitos variables en el tiempo de grado superior a uno

FLÓREZ ESCOBAR WHADY FELIPE
Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín

Aplicación de un esquema implícito en diferencias finitas con aceleración de Chebyshev, al análisis de transferencia de calor no estacionaria en recintos con aire acondicionado

GALEANO ANDRATÍES RAFAEL
Universidad de Cartagena, Cartagena

Existencia y unicidad de soluciones clásicas para la ecuación de Enkog no lineal

GINIATOULLINE ANDREI
Universidad de los Andes, Bogotá

Propiedades comparativas de las soluciones de los sistemas del líquido estratificado y sistemas del movimiento giratorio del líquido homogéneo

GÓMEZ JAIME ENRIQUE
WESSEX Institute of Technology, UK

Ecuaciones integrales y el método de elementos de frontera

MARÍN RAMÍREZ ANA MAGNOLIA
Universidad del Valle, Cali

Principio del máximo y simetría

MIKHAILOV ILIA D.
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga

Análisis numérico del espectro de Sturm-Liouville estocástico

Ecuación integral de Dyson para matrices markovianas

ORTIZ ORTIZ RUBÉN DARÍO
Universidad del Valle, Cali

Hipersuperficies compactas con curvatura media de orden superior constante

PADRÓN RODRÍGUEZ VÍCTOR
Universidad de los Andes, Venezuela

Stable patterns in a model for aggregating populations

PERDOMO ORTIZ OSCAR MARIO
Universidad del Valle, Cali

La aplicación de Gauss de una superficie mínima completa y lagrangiana no puede omitir más de cuatro puntos

RUEDA ANGEL DOMINGO
Universidad del Zulia, Venezuela

The Lewowicz's number for linear diffeomorphisms on the torus

TORO JOSÉ RAFAEL
Universidad de los Andes, Bogotá

Analogías cuánticas en estadísticas de Navier-Stokes

Lista de Participantes

Participantes Nacionales

ADARVE DELGADO SERGIO
Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas, A.A. 4976, Bogotá, Colombia

ADUEN MUSKUS HUGO SAMUEL
Universidad de Córdoba, Departamento de Matemáticas, A.A. 4600, Montería, Colombia

ALVAREZ PÉREZ CARLOS ABEL
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, Ciudad Universitaria, Bogotá, Colombia

ARANGO JUAN H.
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, A.A. 3840, Medellín, Colombia

ARRIETA EDGARDO
Universidad de los Andes, Facultad de Ingeniería, A.A. 4976, Bogotá, Colombia

ARRIETA VERGARA ABELARDO ANTONIO
Universidad de Córdoba, Departamento de Matemáticas, A.A. 4600 Montería, Colombia

ARTEAGA BEJARANO JOSÉ RICARDO
Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas, A.A. 4976, Bogotá, Colombia
e-mail: jarteaga@cdcnet.uniandes.edu.co

AVILEZ ORTIZ SERGIO MIGUEL
Universidad de Córdoba, Departamento de Matemáticas, A.A. 4600, Montería, Colombia

Barrera Durango Havid Germán
Universidad de Córdoba, Departamento de Matemáticas, A.A. 4600, Montería, Colombia
Bogoya López Mauricio
Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas, A.A. 4976, Bogotá, Colombia

Caicedo Núñez Andrés Eduardo
Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas, A.A. 4976, Bogotá, Colombia
e-mail: a-caiced@uniandes.edu.co

Capasso Ítalo
Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas, A.A. 4976, Bogotá, Colombia

Cárdenas Poloche Franqui Solis
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, Ciudad Universitaria, Bogotá, Colombia

Cardona Guio Alexander
Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas, A.A. 4976, Bogotá, Colombia
e-mail: acardona@cdcnet.uniandes.edu.co

Castellanos Ramos Jairo Eloy
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, A.A. 3840, Medellín, Colombia
e-mail: lkong@math.cornell.edu

Castro Triana Rafael Antonio
Universidad Industrial de Santander, Departamento de Matemáticas, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia
e-mail: CRAMIREZ@HEMEROTECA.ICFES.Gov.Co

Cepeda Cuervo Edilberto
Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas, A.A. 4976, Bogotá, Colombia

Charris Jairo Antonio
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, Ciudad Universitaria, Bogotá, Colombia

Chica Escobar Jaime
Universidad de Antioquia, Departamento de Matemáticas, A.A. 1226, Medellín, Colombia

Cossio Betancur Jorge Iván
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, A.A. 3840, Medellín, Colombia
e-mail: jcossio@medellin.cetcol.net.co
Dumett Miguel
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, Ciudad Universitaria, Bogotá, Colombia
e-mail: mateprof@cdcnet.uniandes.edu.co

Durán Hernando
Universidad de los Andes, Facultad de Ingeniería, A.A. 4976, Bogotá, Colombia

Echeverri Argemiro
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, A.A. 3840, Medellín, Colombia
e-mail: aechever@sigma.eafit.edu.co

Echeverry Luz Myriam
Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas, A.A. 4976, Bogotá, Colombia
e-mail: lechever@cdcnet.uniandes.edu.co

Estrada Bustos Hernán
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Física, Ciudad Universitaria, Bogotá, Colombia

Flórez Escobar Whady Felipe
Universidad Pontificia Bolivariana, Departamento de Matemáticas, A.A. 1178, Medellín, Colombia
e-mail: cidiupb@sigma.eafit.edu.co

Fonseca Buitrago Germán Eduardo
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, Ciudad Universitaria, Bogotá, Colombia
e-mail: mateprof@cdcnet.uniandes.edu.co

Galeano Andratíes Rafael
Universidad de Cartagena, Departamento de Matemáticas, A.A. 1382 Cartagena, Colombia

Giniatoulline Andrei
Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas, A.A. 4976, Bogotá, Colombia
e-mail: aginiato@cdcnet.uniandes.edu.co

GIRALDO MONTES LUIS EDUARDO
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, Ciudad Universitaria, Bogotá, Colombia

GIRALDO SALAZAR HERNÁN ALONSO
Universidad de Antioquia, Departamento de Matemáticas, A.A. 1226, Medellín, Colombia

GÓMEZ CAPERA AUGUSTO ANTONIO
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, Ciudad Universitaria, Bogotá, Colombia

GÓMEZ GÓMEZ LUIS ARBEY
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Departamento de Matemáticas, Carrera 18 Calle 22, Duitama, Boyacá

HERNÁNDEZ MONZÓN JAIRO
Universidad del Norte, Departamento de Matemáticas, Km 5. Carretera a Pto. Colombia, Barranquilla, Colombia.

HERRERA GÓMEZ EDDY CRISTÓBAL
Universidad de Córdoba, Departamento de Matemáticas, A.A. 4600, Montería, Colombia

HERRÓN OSORIO SIGIFREDO DE JESÚS
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, A.A. 3840, Medellín, Colombia

JARA PINZÓN DIEGO
Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas, A.A. 4976, Bogotá, Colombia

JARAMILLO JUSTINICO RODNEY
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, A.A. 3840, Medellín, Colombia

JULIO ARRIETA CARLOS ANTONIO
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Departamento de Matemáticas, Cr8 40-78 Bogotá, Colombia

LESMES CAMACHO JAIME
Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas, A.A. 4976, Bogotá, Colombia
e-mail: jlesmes@cdcnet.uniandes.edu.co

LÓPEZ RÍOS VÍCTOR IGNACIO
Universidad de Antioquia, Departamento de Matemáticas, A.A. 1226, Medellín, Colombia

MARAÑÓN ALEJANDRO
Universidad de los Andes, Facultad de Ingeniería, A.A. 4976, Bogotá, Colombia

MARÍN RAMÍREZ ANA MAGNOLIA
Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas, A.A. 25360 Cali, Colombia
e-mail: ammarin@hypatia.univalle.edu.co

MARIÑO VON HILDEBRAND JULIÁN
Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas, A.A. 4976, Bogotá, Colombia

MEJÍA SALAZAR CARLOS ENRIQUE
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, A.A. 3840, Medellín, Colombia
e-mail: cemejia@perseus.unalmed.edu.co

MENDEZ LUIS MIGUEL
Universidad de los Andes, Facultad de Ingeniería, A.A. 4976, Bogotá, Colombia

MIKHAILOV ILIA D.
Universidad Industrial de Santander, Departamento de Matemáticas, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia
e-mail: imikhail@uiscol.edu.co

MONTES MONTES RODRIGO ANTONIO
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, A.A. 3840, Medellín, Colombia

NAVARRO GUTIERREZ MANUEL
Universidad del Norte, Departamento de Matemáticas, Km 5. Carretera a Pto. Colombia, Barranquilla, Colombia.

NIÑO ROCHA JAIME
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, Ciudad Universitaria, Bogotá, Colombia

ORTEGA SALTARÍN LUIS ÁNGEL
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, Ciudad Universitaria, Bogotá, Colombia

ORTIZ ORTIZ RUBÉN DARÍO
Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas, A.A. 25360 Cali, Colombia
e-mail: rdortiz@hypatia.univalle.edu.co

Ortiz Parsons Ivonne Johanna
Universidad de Antioquia, Departamento de Matemáticas, A.A. 1226, Medellín, Colombia

Perdomo Ortiz Oscar Mario
Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas, A.A. 25360 Cali, Colombia
e-mail: oscarp@hypatia.univalle.edu.co

Pinzón Durán Sofía
Universidad Industrial de Santander, Departamento de Matemáticas, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia

Plaza Pérez Amaury Jacob
Universidad de Córdoba, Departamento de Matemáticas, A.A. 4600, Montería, Colombia

Puerta Ortiz Fernando
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, A.A. 3840, Medellín, Colombia

Ramírez Martínez Sonia Maritza
Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas, A.A. 25360 Cali, Colombia
e-mail: sonia@hypatia.univalle.edu.co

Restrepo Quintero Diego Alejandro
Universidad de Antioquia, Departamento de Matemáticas, A.A. 1226, Medellín, Colombia
e-mail: DRESTREPO@INSTRU.UDEA.EDU.CO

Roca Herrera Hegel Antonio
Universidad de Córdoba, Departamento de Matemáticas, A.A. 4600, Montería, Colombia

Roctus Pabón Schweitzer
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, Ciudad Universitaria, Bogotá, Colombia

Rodriguez José
Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas, A.A. 4976, Bogotá, Colombia

Rodríguez Blanco Guillermo
Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas, A.A. 4976, Bogotá, Colombia
e-mail: gurodrig@uniandes.edu.co

Rodríguez Cárdenas Carlos Wilson
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, Ciudad Universitaria, Bogotá, Colombia

Ruiz Cifuentes Isabel Cristina
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, A.A. 3840, Medellín, Colombia

Ruiz Vera Jorge Mauricio
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, Ciudad Universitaria, Bogotá, Colombia

Salazar Díaz Olga Patricia
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, A.A. 3840, Medellín, Colombia

Saldarriaga Ortiz Omar Darío
Universidad de Antioquia, Departamento de Matemáticas, A.A. 1226, Medellín, Colombia

Sánchez Vásquez Alejandra
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, Ciudad Universitaria, Bogotá, Colombia

Sarria Alberto
Universidad de los Andes, Facultad de Ingeniería, A.A. 4976, Bogotá, Colombia
e-mail: asarria@cdcnet.uniandes.edu.co

Soriano Méndez Félix Humberto
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, Ciudad Universitaria, Bogotá, Colombia
e-mail: fsoriano@uniandes.edu.co

Tejada Jiménez Débora María
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, A.A. 3840, Medellín, Colombia
e-mail: jcossio@medellin.cetcol.net.co

Toro V. Margarita María
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, A.A. 3840, Medellín, Colombia
e-mail: mmtoro@perseus.unalmed.edu.co

TORO JOSÉ RAFAEL
Universidad de los Andes, Facultad de Ingeniería, A.A. 4976, Bogotá, Colombia
e-mail: jrtoro@cdcnet.uniandes.edu.co

TORRES ARDILA FABIÁN
Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas, A.A. 4976, Bogotá, Colombia
e-mail: fatorres@cdcnet.uniandes.edu.co

VELÁSQUEZ OSSA RAUL EDUARDO
Universidad de Antioquia, Departamento de Matemáticas, A.A. 1226, Medellín, Colombia

VÉLEZ JUAN A.
Universidad de los Andes, Facultad de Ingeniería, A.A. 4976, Bogotá, Colombia

VÉLEZ RUIZ MARIO ELKIN
Universidad de Antioquia, Departamento de Matemáticas, A.A. 1226, Medellín, Colombia
e-mail: FISICA@INSTRU.UDEA.EDU.CO

VERA LIZCANO JUAN CARLOS
Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas, A.A. 4976, Bogotá, Colombia
e-mail: j-vera@argos.uniandes.edu.co

ZAPATA YEPES SANDRA MARÍA
Universidad de Antioquia, Departamento de Matemáticas, A.A. 1226, Medellín, Colombia

ZULAGA MARIO
Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, Ciudad Universitaria, Bogotá, Colombia

ZULUAGA MARTÍNEZ MAURICIO
Universidad de Antioquia, Departamento de Matemáticas, A.A. 1226, Medellín, Colombia

Participantes Internacionales

ALVAREZ SAMANIEGO BORYS YAMIL
Escuela Politécnica Nacional, Apartado 17-01-2759 Quito, Ecuador
e-mail: Mramirez@poli.edu.ec

CAO JIANGUO
Cornell University, Department of Mathematics, White Hall, Ithaca, N.Y. 14853 U.S.A. *e*-mail: cao@math.cornell.edu

CASTAÑEDA NELSON
Cornell University, Department of Mathematics, White Hall, Ithaca, N.Y. 14853 U.S.A.
e-mail: andante@math.cornell.edu

CASTRO ALFONSO
University of North Texas, Department of Mathematics, Denton Texas 76203-5116, U.S.A.

CRUZ SAMPEDRO JAIME
Universidad de las Américas, Departamento de Matemáticas, Cholula, Puebla 72820, México.
e-mail: sampedro@udlapvms.pue.udlap.mx

ESCOBAR VELÁSQUEZ JOSÉ FERNANDO
Cornell University, Department of Mathematics, White Hall, Ithaca, N.Y. 14853 U.S.A.
e-mail: escobar@math.cornell.edu

FREIRE ALEXANDRE
University of Tenessee at Knoxville, Mathematics Department, Knoxville, TN 37996-1300, U.S.A.
e-mail: freire@math.utk.edu

GARCÍA GONZALO
Cornell University, Department of Mathematics, White Hall, Ithaca, N.Y. 14853 U.S.A.
e-mail: ggarcia@instru.udea.edu.co

GÓMEZ JAIME ENRIQUE
WESSEX Institute of Technology, Southampton, UK.
e-mail: JEG@IBM-B.RUTHERFORD.AC.UK

IÓRIO RAFAEL
IMPA, Estrada Dona Castorina 110, Jardim Botânico, 20460 Rio de Janeiro, R.J., Brasil
e-mail: rafael@impa.br ó rafael@iprj.uerj.br

JOLY PASCAL
Université de Paris VI, Laboratoire d'Analyse Numérique, 4 Place Jussieu (75252) Paris (05), Francia
e-mail: joly@ann.jussieu.fr

KONG LIDONG
Cornell University, Department of Mathematics, White Hall, Ithaca, N.Y. 14853 U.S.A.
e-mail: lkong@math.cornell.edu

MICALLEF MARIO
University of Warwick, Mathematical Sciences Institute, Coventry (CV47AL), Inglaterra
e-mail: mm@maths.warwick.ac.uk

PADRÓN RODRÍGUEZ VÍCTOR
Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas, Mérida, Venezuela
e-mail: padron@ciens.ula.ve

PINTO FRED CARLOS
Indiana University, Department of Mathematics, Bloomington, IN 47405-5701, U.S.A.
e-mail: fpinto@silver.ucs.indiana.edu

POLLACK DANIEL
University of Chicago, Department of Mathematics, 5734 S.University Av., Chicago, ILL 60637 U.S.A.
e-mail: pollack@math.uchicago.edu

PONCE GUSTAVO
University of California at Santa Barbara, Department of Mathematics, Santa Barbara, CA 93106, U.S.A.
e-mail: Gustavo.Ponce@math.ucsb.edu

RUEDA ANGEL DOMINGO
Universidad del Zulia, Departamento de Matemáticas, Macaraibo, Venezuela
e-mail: arueda@europa.ica.luz.ve

SCHATZ ALFRED H.
Cornell University, Department of Mathematics, White Hall, Ithaca, N.Y. 14853 U.S.A.
e-mail: schatz@math.cornell.edu

SCOTT SIMON
Oxford University, Physics Department, Oxford, OX1 3PU, U.K.
e-mail: sgs@vax.ox.ac.uk

SIMON LEON
Standford University, Department of Mathematics, Stanford, CA 90923 U.S.A.
e-mail: lms@cauchy.stanford.edu

SOLOMON BRUCE
Indiana University, Department of Mathematics, Bloomington, IN 47405-5701, U.S.A.
e-mail: solomon@obsidian.math.indiana.edu

TABAK ESTEBAN
Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, NY 10012, U.S.A.
e-mail: tabak@MATH13.CIMS.NYU.EDU

TORO TATIANA
University of Chicago, Department of Mathematics, 5734 S.University Av., Chicago, ILL 60637 U.S.A.
e-mail: toro@math.uchicago.edu

Memorias III Escuela de Verano
Geometría Diferencial
Ecuaciones Diferenciales Parciales
y Análisis Numérico
Universidad de los Andes, 20 a 30 de junio de 1995
páginas 1–7

An isoperimetric comparison theorem for PL-manifolds of non-positive curvature

JIANGUO CAO[1]

Cornell University, USA

ABSTRACT. In this lecture we report joint work with Professor José Escobar on an optimal isoperimetric comparison theorem for manifolds with non-positive curvature.

A piecewiseflat manifold M^n is said to have non-positive curvature in the sense of Gromov if M^n satisfies the CAT(0) inequality (see definition below). This lecture will focus on the following theorem.

Main Theorem. *Let M^n be a simply-connected, complete and piecewise flat manifold. Suppose that M^n has non-positive curvature in the sense of Gromov. Then*

$$vol_{n-1}(\partial\Omega) \geq c_n[vol_n(\Omega)]^{\frac{n-1}{n}} \tag{1}$$

for any compact domain $\Omega \subseteq M^n$ with rectifiable boundary $\partial\Omega$, where

$$c_n = vol_{n-1}[S^{n-1}(1)]/\{vol_n[B^n(1)]\}^{\frac{n-1}{n}}$$

[1]Supported in part by NSF grants.

is the optimal constant in the n-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^n$.

Our isoperimetric comparison theorem was motivated by the classical isoperimetric inequalities. One of the classical isoperimetric inequalities says that if $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ is a compact domain with smooth boundary $\partial\Omega$, then

$$\mathrm{vol}_{n-1}(\partial\Omega) \;\geq\; c_n\,[\mathrm{vol}_n(\Omega)]^{\frac{n-1}{n}}$$

where c_n is as in (1) above.

In order to study isoperimetric inequalities more systematically, we introduce the notion of isoperimetric profile on any given Riemannian manifold.

Definition 1. The isoperimetric profile of a Riemannian manifold M^n is the function $I_{M^n} : [0, \mathrm{vol}(M^n)) \to \mathbb{R}$ defined by

$$I_{M^n}(v) \;=\; \inf\{\mathrm{vol}_{n-1}(\partial\Omega) \mid \Omega \subset M^n \text{ is a compact domain with smooth boundary } \partial\overline{\Omega},\ \mathrm{vol}(\Omega) = v\}.$$

For example, if $M^2 = \mathbb{R}^2$ is the Euclidean plane, then it is well-known that

$$[L(\partial\Omega)]^2 \;\geq\; 4\pi\,\mathrm{Area}(\Omega)\,, \tag{2}$$

for any compact domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, where $L(\partial\Omega)$ denotes the length of $\partial\Omega$.

Similarly, if $M^2 = S^2(1)$ is the unit 2-sphere with the constant curvature $K \equiv 1$, then

$$[L(\partial\Omega)]^2 \;\geq\; 4\pi\,A(\Omega) \,-\, [A(\Omega)]^2\,, \tag{3}$$

for $\Omega \subset S^2$.

It is interesting to notice that if $M^2 = \mathbb{H}^2$ is the hyperbolic plane of constant curvature $K \equiv -1$, then

$$[L(\partial\Omega)]^2 \;\geq\; 4\pi\,A(\Omega) \,+\, [A(\Omega)]^2\,, \tag{4}$$

for any compact domain $\Omega \subset \mathbb{H}^2$.

In summary, we have

$$I_{M^2}(a) \;=\; \begin{cases} \sqrt{4\pi a - a^2} & \text{if } K_{M^2} \equiv +1 \\ \sqrt{4\pi a} & \text{if } K_{M^2} \equiv 0 \\ \sqrt{4\pi a + a^2} & \text{if } K_{M^2} \equiv -1 \end{cases} \tag{5}$$

where M^2 is the 2-dimensional simply-connected space of constant curvature $K \equiv 0$ or $K \equiv \pm 1$. We have seen by the examples above that

$$I_{S^2}(a) \;\leq\; I_{\mathbb{R}^2}(a) \;\leq\; I_{\mathbb{H}^2}(a) \tag{6}$$

for any $a \in [0, 4\pi]$.

We now would like to provide a short proof of (5), where M^2 is a simply-connected surface of constant curvature K.

For the special case $K \equiv 0$, we see that M^2 is isometric to the Euclidean plane $\mathbb{R}^2$, since M^2 is simply-connected. In this case, any round disc B_r of area $a = \pi r^2$ satisfies $[(\partial B_r)]^2 = 4\pi\mathrm{Area}(\partial\Omega)$. Therefore, to verify $I_{\mathbb{R}^2}(a) = \sqrt{4\pi a}$ for $a \in \mathbb{R}^+$, is equivalent to proving (2) for any compact domain Ω with $\mathrm{Area}(\Omega) = a$ in $\mathbb{R}^2$.

The verification of (2) goes as follows. For a given compact domain Ω with smooth boundary $\partial\Omega$ in $\mathbb{R}^2$, we observe that Ω must be homeomorphic to a disk D with possibly finitely many smaller disks removed. This is to say, $\Omega = \Omega_0 - \coprod_{k=0}^m D_k$, where Ω_0 is homeomorphic to a disk and $\{D_k\}_{k=0}^m$ are possible "holes" inside Ω_0. Notice that

$$L(\partial\Omega) \;=\; L(\partial\Omega_0) + \sum_{k=0}^{m} L(\partial D_k) \;\geq\; L(\partial\Omega_0)$$

and

$$\mathrm{Area}(\Omega) \;\leq\; \mathrm{Area}(\Omega_0)\,.$$

It is sufficient to prove (2) for simply-connected domains Ω_0.

Since Ω_0 is homeomorphic to a disk, $\partial\Omega_0$ is homeomorphic to the circle S^1. Let s be an arc-length parametrization of $\partial\Omega_0$. After re-choosing the origin of $\mathbb{R}^2$, we may assume that $\partial\Omega_0$ has its venter at (0,0). I.e.,

$$\begin{cases} \int_{\partial\Omega_0} x(s)\,ds \;=\; 0 \\ \int_{\partial\Omega_0} y(s)\,ds \;=\; 0 \end{cases}$$

Denote the length $L(\partial\Omega_0)$ of $\partial\Omega_0$ by l. We will use the following fact. If $\int_0^l f(s)\,ds = 0$ and $f(0) = f(l)$, then

$$\int_0^l [f'(s)]^2\,ds \;\geq\; \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \int_0^l [f(s)]^2\,ds\,. \tag{*}$$

(Hint: $f(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(\frac{2k\pi s}{l}) + b_k\sin(\frac{2k\pi s}{l})\right]$).

In $\mathbb{R}^2$, we have

$$\Delta_{\mathbb{R}^2}(x^2 + y^2) \;=\; 4\,.$$

Hence, it follows that

$$4\,\mathrm{Area}(\Omega_0) \;=\; \int_{\Omega_0} \Delta_{\mathbb{R}^2}(x^2+y^2)\,dA \;=\; \int_{\partial\Omega_0} \langle \mathrm{grad}(x^2+y^2)\,,\,\vec{n}\rangle\,ds\,,$$

where $\vec{n}$ is the outward unit normal vector along $\partial\Omega_0$. Using the Hölder inequality, we further observe that

$$\begin{aligned} 4\,\mathrm{Area}(\Omega_0) &= \int_{\partial\Omega_0} \langle \mathrm{grad}(x^2+y^2)\,,\,\vec{n}\rangle\, ds \;=\; \int_0^l \left\langle 2\begin{bmatrix} x(s) \\ y(s)\end{bmatrix}\,,\,\vec{n}\right\rangle ds \\ &\le 2\int_0^l \sqrt{x^2(s)+y^2(s)}\, ds \\ &\le \left(\int_0^l \left[x^2(s)+y^2(s)\right] ds\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^l 1\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le 2\left\{\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \int_0^l \left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right] ds\right\}^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{l^2}{\pi} \;=\; \frac{[L(\partial\Omega_0)]^2}{\pi} \end{aligned}$$

where we used the inequality (*).

In order to prove $I_{S^2}(a) = \sqrt{4\pi a - a^2}$ for $a \in [0, 4\pi]$, we use the following fact.

Fact 1. *Let Ω_0 be an optimal domain in a Riemannian surface M^2 with $\mathrm{Area}(\Omega_0) = a$ and $L(\partial\Omega_0) = I_{M^2}(\Omega_0)$. Then $\partial\Omega_0$ must have constant mean curvature, (see [5]).*

We should point out that since S^2 is compact, the optimal domain Ω_0 always exists. Because $S^2(1)$ is rotationally symmetric, all closed curves $\partial\Omega_0$ with constant mean curvature must be small circles in the unit 2-sphere $S^2(1)$. It follows that $I_{S^2}(a) = L(\partial\Omega_0) = \sqrt{4\pi a - a^2}$ by a direct computation, because $\partial\Omega_0$ is isometric to a small circle in $S^2(1)$.

For the hyperbolic plane $\mathbb{H}^2$, we observe that the group of Möbius transformations acts on $\mathbb{H}^2$ isometrically. Fix an $a \in \mathbb{R}$ and take a sequence of domains $\{\Omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ with $\mathrm{Area}(\Omega_i) = a$ and

$$L(\partial\Omega_i) \longrightarrow I_{\mathbb{H}^2}(a)\,.$$

Because the isometry group G of $\mathbb{H}^2$ acts on $\mathbb{H}^2$ transitively, we may assume that all elements in $\{\partial\Omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ have a common point p_0. Therefore, $\partial\Omega_i$ lies in a compact set $B_{r_0}(p_0)$ around p_0 for every $i = 1, \ldots, \infty$. It follows that there exists a subsequence of $\{\partial\Omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ such that the subsequence converges to an optimal boundary domain $\partial\Omega_0$. (Note that each $\partial\Omega_i$ corresponds to a Lipschitz map $f_i : S^1 \longrightarrow \partial\Omega_i \subseteq B_{r_0}(p_0)$, and $\{f_i\}$ forms an equicontinuous family of Lipschitz maps.) By Fact 1, $\partial\Omega_0$ has constant mean curvature in $\mathbb{H}^2$. It now follows that $I_{\mathbb{H}^2}(a) = L(\partial\Omega_0) = \sqrt{4\pi a + a^2}$ for a geodesic disk Ω_0 of $\mathrm{Area}(\Omega_0) = a$.

This completes the proof of (5). It follows immediately that (6) holds for $a \in [0, 4\pi]$

Inspired by inequality (6) above, Gromov and others made the following conjecture.

Conjecture A. *Let M^n be a simply-connected, complete Riemannian manifold of non-positive curvature $K_M \le 0$. Then*

$$I_{M^n}(v) \;\ge\; I_{\mathbb{R}^n}(v)$$

for any $v > 0$.

Notice that a compact domain $\Omega \subset M^n$with smooth boundary $\partial\Omega$ satisfies the sharp Euclidean isoperimetric inequality

$$\mathrm{vol}_{n-1}(\partial\Omega) \;\ge\; c_n\,[\mathrm{vol}(\Omega)]^{\frac{n-1}{n}} \tag{7}$$

if and only if

$$I_{M^n}(v) \;\ge\; I_{\mathbb{R}^n}(v)$$

holds for $v = \mathrm{vol}(\Omega)$.

The two, three and four dimensional cases of Conjecture A were proved by A. Weil, B. Kleiner and C. Croke respectively.

In this lecture, we study a PL version of Conjecture A. A PL-manifold M^n is said to have non-positive curvature in the sense of Gromov if it satisfies CAT(0), the comparison axiom of Alexandrov-Topogonov.

Definition 2 (Gromov's CAT condition). Let $t = \Delta(x_0, x_1, x_2)$ be a geodesic triangle in M^n, and let y be a point on the side of T which has endpoint x_1 and x_2. Choose a comparison triangle $T' = \Delta(x_0', x_1', x_2')$ of the same length in $\mathbb{R}^2$, and let y' denote the unique point on the line segment $[x_1', x_2']$ such that $d_{\mathbb{R}^2}(x_i',\, y) = d_{M^n}(x_i\,,\, y)$ for $i = 1, 2$. Then $d_{\mathbb{R}^2}(x_0'\,,\, y) = d_{M^n}(x_0\,,\, y)$.

One can easily construct examples of PL-manifolds with non-positive curvature. For instance, let M^2 be a 2-dimensional, complete, simply-connected, piecewise flat metric simplicial manifold. Then M^2 satisfies CAT(0) if and only if the total angle at each point $p \in M^2$ is greater than or equal to 2π.

The following theorem provides a PL version of a solution to Conjecture A.

Theorem A. *Let M^n be a simply-connected, complete and piecewise flat manifold. Suppose M^n has non-positive curvature in the sense of Gromov (i.e., M^n satisfies the CAT(0) inequality). Then, for any compact domain $\Omega \subset M^n$ with rectifiable boundary, the inequality*

$$vol_{n-1}(\partial\Omega) \;\ge\; c_n\,[vol(\Omega)]^{\frac{n-1}{n}}$$

holds. I.e.,

$$I_{M^n}(v) \;\ge\; I_{\mathbb{R}^n}(v) \tag{8}$$

for any $v > 0$.

For a Riemannian manifold M^n that can be approximated by a sequence of piecewise flat manifolds $\{M_i^n\}_{i=1}^{\infty}$ satisfying the CAT(0) inequality. the conclusion of Conjecture A follows immediately from Theorem A.

We conclude this lecture by an outline proof of Theorem A.

The outline of proof of Theorem A

For any given $v_0 > 0$, we would like to consider the derivative of the isoperimetric profile I_{M^n} at $v = v_0$ if I_{M^n} is a differentiable function of v. In fact, if there exists a compact, optimal domain Ω_0 of volume v_0 and with smallest boundary area $\mathrm{vol}_{n-1}(\partial\Omega_0)$, then we can estimate

$$\frac{dI_m^n}{dv}(v_0)$$

in terms of the mean curvature of the boundary $\partial\Omega_0$ of the optimal domain Ω_0. More precisely, we have the following well-known fact.

Fact 2 (cf [4, p. 38]). *Let $\Omega_0 \subset M^n$ be a compact domain with smooth boundary $\partial\Omega_0$, and $v_0 = vol(\Omega_0)$. Suppose that $\mathrm{Area}(\partial\Omega_0) = I_{M^n}(v_0)$; i.e., Ω_0 has least boundary area among domains with volume v_0. Then the first variational formulae for volume and area imply that the mean curvature function of $\partial\Omega_0$ (the trace of the second fundamental form) is everywhere equal to some constant H_{v_0}. Further,*

$$\frac{d^- I_{M^n}}{dv}(v_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta \searrow 0-} \frac{I_{M^n}(v_0+\Delta v) - I_{M^n}(v_0)}{\Delta v}$$

$$\geq H_{v_0}\,. \tag{9}$$

In order to prove $I_{M^n}(v) \geq I_{\mathbb{R}^n}(v)$ for all $v \in \mathbb{R}$, it suffices to show

$$I_{M^n}(v)\Big(\frac{1}{n-1}\frac{dI_{M^n}}{dv}\Big)^{n-1} \geq I_{\mathbb{R}^n}(v)\Big(\frac{1}{n-1}\frac{dI_{\mathbb{R}^n}}{dv}\Big)^{n-1} \tag{10}$$

Recall that optimal domains in $\mathbb{R}^n$ are isometric to round balls. Hence, using Fact 2 we see that

$$I_{\mathbb{R}^n}(v)\Big(\frac{1}{n-1}\frac{dI_{\mathbb{R}^n}}{dv}\Big)^{n-1} = \int_{\partial B_r(0)} \Big(\frac{1}{n-1} H_{\partial B_r(0)}\Big)^{n-1} d\mathrm{vol}_{n-1}$$

$$= \mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1}(1))\,, \tag{11}$$

where $B_r(0)$ is the round ball of radius r in $\mathbb{R}^n$. Using (10), (11) and Fact 2, we see that it remains to prove

$$\int_{\partial\Omega} |h_{\partial\Omega}(p)|^{n-1}\, d\mathrm{vol}_{n-1} \geq \mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1}(1))\,, \tag{12}$$

for $\Omega \subset M^n$, where

$$h_{\partial\Omega} = \frac{1}{n-1} H_{\partial\Omega}$$

stands for the averaged mean curvature.

In the special case $\dim M^n = n = 2$, the inequality (12) becomes

$$\int_{\partial\Omega} |h_{\partial\Omega}(p)|\, ds \geq 2\pi\,. \tag{13}$$

For any compact, convex domain Ω in a simply-connected surface M^2 of non-positive curvature $K \leq 0$, the inequality(13) holds by the Gauss-Bonnet formula. Hence, Theorem A holds for $\dim M^n = 2$.

For the higher dimensional cases, we have

Key Proposition (cf. [2]). *Let M^n be a simply-connected, complete and piecewise flat manifold. Suppose M^n satisfies Gromov's CAT(0) condition. Then for any compact, convex domain Ω in M^n, we have*

$$\int_{\partial\Omega} |h_{\partial\Omega}|^{n-1}\, d\mathrm{vol}_{n-1} \geq \mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1}(1))$$

where the mean curvature $h_{\partial\Omega}$ is defined in the sense of Steiner and Federer.

The Key Proposition and the discussion above will imply Theorem A.

References

[1] F. Almgren, *Optimal isoperimetric inequalities*, Bull. Amer. Math. Soc. **13** no. 2 (1985), 123–126.

[2] J. Cao and J. F. Escobar, *An isoperimetric comparison theorem for PL-manifolds of non-positive curvature*, preprint, Cornell University.

[3] C. Croke, *A sharp four dimensional isoperimetric inequality*, Comment Math. Helv. **59** no. 2 (1984), 187–192.

[4] B. Kleiner, *An isoperimetric comparison theorem*, Invent. Math. **108** no. 1 (1992), 37–47.

[5] R. Osserman, *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. **84** no. 6 (1978), 1182–1238.

[6] A. Weil, *Sur les surfaces à courbure négative*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math. **182** (1926), 1069–1071.

JIANGUO CAO
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
CORNELL UNIVERSITY
ITHACA, NY 14853
USA

Memorias III Escuela de Verano
Geometría Diferencial
Ecuaciones Diferenciales Parciales
y Análisis Numérico
Universidad de los Andes, 20 a 30 de junio de 1995
páginas 9–13

Negative scalar curvature and totally geodesic boundary on a compact Riemannian manifold

José F. Escobar[1]

Cornell University, USA

It is well known that a compact Riemannian manifold without boundary and dimension $n \geq 3$ admits a metric with negative scalar curvature (see [Av], [Au], [El]). Therefore there are no topological restrictions for a compact Riemannian manifold to admit a metric with negative scalar curvature. There are well known topological restrictions on a compact manifold without boundary to admit a metric with positive or zero scalar curvature (see [G]).

In this lecture we address the following question: Does a compact Riemannian manifold with boundary admit a metric with negative scalar curvature? To make our question interesting, one should impose some condition on the boundary. In order to impose an interesting condition we restate Aubin's theorem in terms of the Sobolev quotient of a manifold (see definition in [Au]): Any compact Riemannian manifold without boundary admits a metric with negative Sobolev quotient. We can ask if the same statement holds on manifolds with boundary where the Sobolev quotient is defined in [Es]. If it does then M admits a metric with negative scalar curvature and the boundary is minimal (i.e., has zero mean curvature) (see Lemma 1.1 in [Es]). In this paper we answer the question in the affirmative. Moreover we construct a metric

[1]The author holds a Presidential Faculty Fellowship.

on a compact Riemannian manifold with boundary that has negative scalar curvature and the boundary is totally geodesic.

Our construction is as follows: Given a Riemannian manifold with boundary (M^n, g_0) with $n \geq 3$, we first change the metric g_0 to a metric g_1 where ∂M is totally geodesic. This is done by considering the product metric in a neighborhood of ∂M. Then we perturb the metric g_1 in the interior of M to a metric g_2 that has negative Sobolev quotient and then we deform the metric g_2 within the conformal class of g_2, using the first eigenfunction of the conformal Laplacian to get a metric with negative scalar curvature and where ∂M is totally geodesic.

Our first proposition deals with the construction of the metric g_1.

Proposition 1. *Let (M, g_0) be a compact Riemannian manifold with boundary. Then M admits a metric g_1 with totally geodesic boundary.*

Proof. Let t be the distance to the boundary of ∂M which is well defined for $0 \leq t \leq \varepsilon$ for ε small. In the neighborhood of ∂M, $[0, \varepsilon] \times \partial M$ we define the product metric $g_\varepsilon = dt^2 + g_0$ where g_0 is the induced Riemannian metric on ∂M. We extend the metric g_ε to any metric on M. It is clear that ∂M is totally geodesic.

To be able to construct the metric g_2 we need to introduce the Sobolev quotient of a Riemannian manifold with boundary, (M^n, g), with $n \geq 3$. For a function φ on M we define the Sobolev quotient $Q(\varphi)$ by

$$Q(\varphi) = \frac{E(\varphi)}{\left(\int_M |\varphi|^{\frac{2n}{n-2}} dv_g\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

where

$$E(\varphi) = \int_M \left(|\nabla \varphi|^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g(\varphi)^2\right) dv_g + \frac{n-2}{2} \int_{\partial M} h_g \varphi^2 d\sigma_g$$

where dv_g and $d\sigma_g$ are the Riemannian measure on M and on ∂M induced by the metric g, R_g is the scalar curvature and h_g is the mean curvature of the boundary with respect to the metric g. The Sobolev quotient $Q(M)$ is defined by

$$Q(M) = \inf \left\{ Q(\varphi) \mid \varphi \in C^1(\overline{M}),\ \varphi \not\equiv 0 \text{ on } M \right\}. \tag{1}$$

The number $Q(M)$ clearly depends on the metric g, and we will denote it sometimes as $Q(M, g)$. However Proposition 1.1 in [Es] asserts that if g_1 and g_2 are two metrics conformally related then $Q(M, g_1) = Q(M, g_2)$.

We remark that the functional $E(\varphi)$ is a restricted version of a more general functional: "The total scalar curvature and total mean curvature", which is defined by

$$T(g) = \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R_g dv_g + \frac{n-2}{2} \int_{\partial M} h_g d\sigma_g \tag{2}$$

for $g \in \mathcal{M}$, where $\mathcal{M}$ is the space of all smooth Riemannian metrics on M. Recall that if $g = u^{4/(n-2)} g_0$ (see [Es]) then

$$\frac{n-2}{4(n-1)} R_g = -\frac{L_{g_0} u}{u^{\frac{n+2}{n-2}}} \quad \text{where} \quad L_{g_0} = \Delta_{g_0} - \frac{n-2}{4(n-1)} R_{g_0} \tag{3}$$

and

$$\frac{n-2}{2} h_g = \frac{B_{g_0} u}{u^{\frac{n}{n-2}}} \quad \text{where} \quad B_{g_0} = \frac{\partial}{\partial \eta_{g_0}} + \frac{n-2}{2} h_{g_0}. \tag{4}$$

Here $\frac{\partial}{\partial \eta_{g_0}}$ is the outward normal derivative operator calculated with respect to the metric g_0. Using formulae (3) and (4), and considering the metric g of the form $g = u^{4/(n-2)} g_0$ where g_0 is a fixed metric, one finds after integrating by parts that

$$T(g) = T\left(u^{\frac{4}{n-2}} g_0\right) = E(u). \tag{5}$$

The next proposition was proved for compact Riemannian manifolds without boundary by Avez [Av] and Aubin [Au] (see also [Es]). Our proof follows the argument due to L. Berard Bergery.

Proposition 2. *For any compact Riemannian manifold (M^n, g) there exists a metric g_2 such that $Q(M, g_2) < 0$.*

Proof. Let B be an open ball in M such that $\overline{B} \subset M$. Let $S^p \times B^q$ be inside B where S is a sphere of dimension $p \geq 1$ and B is a ball of dimension $q \geq 2$ and $p + q = n$. Let $f > 0$ be a function defined on B^q depending only on the distance to the origin and identically 1 in a neighborhood of ∂B^q. Let g_0 be the standard metric on the sphere of constant sectional curvature and consider the metric

$$g_f = f^{-\frac{2p}{n-1}} (f^2 g_0 + \delta_{ij})$$

where δ_{ij} is the Euclidean metric on B^q. The metric g_f is defined on $S^p \times B^q$. We define the metric g_2 on M by defining $g_2 = g_f$ on $S^p \times B^q$, $g_2 = g$ on $M - B$ and defining arbitrarily the metric g_2 on $B - S^p \times B^q$. Because the function $f = 1$ in a neighborhood on ∂B^q then the metric $S^p \times B^q$ does not depend on f near the boundary of $S^p \times B^q$ and hence the metric g_2 defined on M only depends on f in the interior of $S^p \times B^q$. Thus we find that

$$\begin{aligned} T(g_2) &= \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R_{g_2} dv_{g_2} + \frac{n-2}{2} \int_{\partial M} h_{g_2} d\sigma_{g_2} \\ &= \frac{n-2}{4(n-1)} \int_{M - S^p \times B^q} R_g dv_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_{S^p \times B^q} R_{g_f} dv_{g_f} + \frac{n-2}{2} \int_{\partial M} h_g d\sigma_g \end{aligned}$$

where the first and the last integrals do not depend on the function f. For the second integral on the right hand side of the last equality we find by direct

computation that

$$\int_{S^p\times B^q} R_{g_f} dv_{g_f} = \mathrm{Vol}(S^p, g_0) \int_{B^q} f^{(\frac{p}{n-1}-2)} \left(R_{g_0} - \frac{p(n-1-p)}{(n-1)} |\nabla f|^2 \right) dv_{\delta_{ij}}.$$

Observe that the coefficient of $|\nabla f|^2$ is negative because $1 \le p \le n-2$. We may choose f such that $0 < C_1 \le f \le C_2$ and $\int_{B^q} |\nabla f|^2 dv_{\delta_{ij}}$ becomes as large as we want in order to get $T(g) < 0$. It follows from equation (5) that $E(1) < 0$ and hence $Q(M, g_2) < 0$.

Remark 3. In the proof of Proposition 2 the metric g_2 satisfies $g_2 = g$ in a neighborhood of ∂M. In particular, if ∂M is totally geodesic with respect to the metric g, then ∂M is totally geodesic with respect to the metric g_2.

Now we are ready to prove our main theorem.

Theorem. *Let (M^n, g_0) be an n-dimensional compact Riemannian manifold with boundary with $n \ge 3$. Then M admits a Riemannian metric with negative scalar curvature and totally geodesic boundary.*

Proof. Proposition 1 asserts that M admits a metric g_1 with totally geodesic boundary. Proposition 2 and Remark 3 implies that we can find a metric g_2 with negative Sobolev quotient and ∂M totally geodesic. The conformal Laplacian with respect to the metric g_2 is the operator (L_{g_2}, B_{g_2}) where L_{g_2} and B_{g_2} are defined in formulae (3) and (4) respectively. Observe that because ∂M is totally geodesic, $B_{g_2} = \frac{\partial}{\partial n_{g_2}}$. Let us consider the first eigenvalue $\lambda_1(g_2)$ and the first eigenfunction φ_1 of the problem

$$\begin{cases} L_{g_2}\varphi_1 + \lambda_1(g_2)\varphi_1 = 0 & \text{on } M \\ B_{g_2}\varphi_1 = 0 & \text{on } \partial M. \end{cases} \tag{6}$$

It is well known that $\varphi_1 > 0$ on $\overline{M}$, so we can consider the Riemannian metric $g_3 = \varphi_1^{\frac{4}{n-2}} g_2$. We claim that the metric g_3 satisfies the conditions in our theorem. First we show that ∂M is totally geodesic with respect to the metric g_3. In order to see that, observe first that ∂M is umbilic with respect to the metric g_2 (because it is totally geodesic). Proposition 1.2 in [Es] asserts that ∂M is umbilic with respect to the metric g_3. The transformation law (4) and the boundary condition in (6) imply that ∂M is minimal with respect to the metric g_3, thus ∂M is totally geodesic with respect to the metric g_3.

To see that $R_{g_3} < 0$ we use the transformation formula (3) and equation (6) to find that

$$\frac{n-2}{4(n-1)} R_{g_3} = \lambda_1 \varphi_1^{-\frac{4}{n-2}}.$$

Thus the sign of R_{g_3} is determined by the sign of λ_1. For the metric g_2, $Q(M, g_2) < 0$ and hence $\lambda_1(g_2) < 0$. Proposition 1.3 in [El] implies that $\lambda_1(g_3) < 0$. Thus $R_{g_3} < 0$ and the proof of our theorem is completed.

References

[Au] T. Aubin, *Métriques riemanniennes et courbure*, J. Differential Geom. **4** no. 4 (1970), 383–424.

[Av] A. Avez, *Valeur moyenne du scalaire de courbure sur une variété compacte. Applications relativistes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math. **256** (1963), 5271–5273.

[B] L. Bérard-Bergery, *Spectra of Riemannian manifolds*, in "Scalar curvature and isometry groups" (M. Berger, S. Murahami, T. Ochiai, eds.), Kagai, Tokyo, 1983, pp. 9–28.

[El] H. T. Eliasson, *On variations of metrics*, Math. Scand. **29** no. 2 (1971), 317–327.

[Es] J. F. Escobar, *The Yamabe problem on manifolds with boundary*, J. Differential Geom. **35** no. 1 (1992), 21–84.

[G] D. Gromoll, *Spaces of nonnegative curvature*, Proc. Sympos. Pure Math. **54** no. Part 3: Riemannian Geometry, (1993), 337–356.

JOSÉ F. ESCOBAR
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
CORNELL UNIVERSITY
ITHACA, NY 14853
USA

Memorias III Escuela de Verano
Geometría Diferencial
Ecuaciones Diferenciales Parciales
y Análisis Numérico
Universidad de los Andes, 20 a 30 de junio de 1995
páginas 15–28

Weak solutions of the harmonic map flow and related problems.

ALEXANDRE FREIRE

University of Tennessee, USA

§1 Introduction

This paper is an expanded version of the author's talk at the 3rd Summer School in differential geometry, partial differential equations and numerical analysis (Bogotá, Colombia, June 1995). Most of the methods described here were first introduced by F. Hélein, F. Bethuel, S. Müller, L.C. Evans and others. I have included a small number of proofs for completeness, but for most results the reader is referred to the literature.

Our main objects of interest are weak solutions of variational and evolution problems for maps $u : M \to N$, where M is a d-dimensional Riemannian manifold and N a compact k-dimensional submanifold of $\mathbb{R}^p$, with the induced metric. We denote by A the second fundamental form of N in $\mathbb{R}^p$. We are interested in the following systems of partial differential equations:

1 WEAKLY HARMONIC MAPS

$$\begin{cases} u \in H^1(M,N) \\ -\Delta u \;=\; \mathrm{tr}_M (A \circ u)(du, du) \end{cases} \tag{HM}$$

(in the sense of distributions). This is the Euler-Lagrange equation for the 'energy' functional:

$$E_u \;=\; \frac{1}{2}\int_M |du|^2 \, dx.$$

2 HARMONIC MAP FLOW

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \mathrm{tr}_M(A \circ u)(du, du) \\ u(0) = u_0 \in H^1(M, N) \quad \text{(given)} \\ u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H^1(M, N)), \quad u_t \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, L^2(M, \mathbb{R}^p)). \end{cases} \tag{HMF}$$

This is the gradient flow for the functional E_u. For brevity we shall denote by $\mathcal{H}$ the space defined by the last two conditions. As is well-known the theorem of Eells and Sampson guarantees the existence of a smooth solution of (HMF) for all time, converging as $t \to \infty$ to a harmonic map from M to N, provided the sectional curvature of N is non-positive. If no curvature conditions are imposed on the target, in general only weak solutions can be expected (see section 3).

3 WAVE MAPS

$$\begin{cases} u \in H^1(M \times \mathbb{R}; N) \\ u_{tt} - \Delta u = \mathrm{tr}_M A(du, du) - A(u_t, u_t), \\ u(0) = u_0 : M \to N \quad u_t(0) = u_1 : M \to \mathbb{R}^p \text{ (given)}. \end{cases} \tag{WM}$$

Here $u_{tt} - \Delta u$ is the wave operator on $M \times \mathbb{R}$, and the equation is satisfied in the distributional sense. For the Cauchy data (u_0, u_1) in (WM) the constraint $u_1(x) \in T_{u_0(x)}N$ is assumed. A solution of (WM) is a stationary point for the Lagrangian:

$$\mathcal{L}(u) = \frac{1}{2} \int [|du|^2 - |u_t|^2] \, dxdt,$$

with respect to compactly supported variations. When N is a compact Lie group, this system has been proposed by physicists (under the name 'σ-model') as a model for classical field theories.

In recent years (c. 1988 to the present) it has been observed, starting with the work of F. Hélein, that for special target spaces N, and for arbitrary targets in an appropriate gauge, the nonlinear term in the above systems has the same 'div-curl structure' which appears in the theory of concentration compactness. This makes it possible to apply methods of classical real analysis (in particular, $\mathcal{H}^1$ - BMO duality) to derive partial regularity, compactness and uniqueness theorems for weak solutions. In these notes we describe: regularity ($d = 2$) and partial regularity ($d \geq 3$) for (HM) (section 2); uniqueness and partial regularity ($d = 2$) for (HMF) (section 3); weak compactness for (HM) and (WM) (section 4).

§2 Weakly harmonic maps

The study of regularity properties of weakly harmonic maps has a long history (see [17] and [18]). The partial regularity properties of energy minimizers ($d \geq 3$) were thoroughly analyzed by Schoen-Uhlenbeck [19] and Giaquinta-Giusti [13] (in $d = 2$ energy minimizers are smooth by classical work of C. B. Morrey). Given the extensive literature on singularities of harmonic maps (1980's), the following definitive theorem in dimension 2 was somewhat unexpected (for simplicity assume M compact without boundary).

Theorem 2.1. (Hélein, [15]) *If $d = 2$, a weakly harmonic map $u \in H^1(M; N)$ is everywhere smooth.*

This was first proved for $N = S^k$ [14] then extended to compact homogeneous targets N [16], then to arbitrary target spaces [15]. Related methods in higher dimensions led to the following theorem:

Theorem 2.2. (Bethuel, [2]) *Let $u \in H^1(M; N)$ be a 'stationary' harmonic map. Then u is smooth in the complement of a closed set $\mathcal{S} \subset M$ with Hausdorff dimension at most $d - 2$.*

This had been proved by L.C. Evans [7] for $N = S^k$. The definition of 'stationary' is technical; the key issue is that it implies the following 'monotonicity property'. For any $x_0 \in M$:

$$\frac{1}{r^{d-2}} \int_{B_r(x_0)} |du|^2 dx \quad \text{is non-decreasing in } r > 0. \tag{MP}$$

The proofs make essential use of $\mathcal{H}^1$ - BMO duality (C. Fefferman). To motivate the introduction of the 'Hardy space' $\mathcal{H}^1$, recall that for $1 < p < \infty$, elliptic regularity in L^p spaces guarantees that if $\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^d$,

$$f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^p) \Rightarrow u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d),$$

but this fails if $p = 1$ (note $A(du, du) \in L^1$ if $u \in H^1$). However for the subspace $\mathcal{H}^1 \subset L^1$ defined below we have (see [6], [20]):

$$f \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow u \in W^{2,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d).$$

2.1 Definition of $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d)$.

Let $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ have support contained in the unit ball $B_1(0)$ and satisfying $\|\nabla\varphi\|_\infty \leq 1$. Define $\varphi_h(x) = \frac{1}{h^n}\varphi\left(\frac{x}{h}\right)$. For $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, consider the 'maximal function':

$$f^*(x) = \sup_{h>0} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\varphi_h(y)dy \right\}.$$

Definitions. $\mathcal{H}^1 = \{f \in L^1(\mathbb{R}^d) \mid f^* \in L^1(\mathbb{R}^d)\}$, endowed with the norm:

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1} \;=\; \|f^*\|_{L^1}\,.$$

We also consider the space of functions of 'bounded mean oscillation':

$$\mathrm{BMO} \;=\; \Big\{ f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \;\Big|\; \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^d\\ r>0}} \fint_{B_r(x)} |f(y) - \overline{f}_{r,x}|dy < \infty \Big\}\,,$$

where $\overline{f}_{r,x} = \fint_{B_r(x)} f(y)\,dy$ and $\fint$ denotes 'average value'. The supremum in the definition is denoted $[f]_{\mathrm{BMOsm}}$ ('BMO seminorm').

Theorem 2.3. (Fefferman) *The dual space of $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d)$ is $BMO(\mathbb{R}^d)$, and:*

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^d} fg\,dx\Big| \;\le\; c\|f\|_{\mathcal{H}^1}\,[g]_{\mathrm{BMOsm}}$$

(The formal integral on the left denotes the duality pairing.)

These definitions may be localized in the standard way (see [20]). Note that by the Sobolev inequality:

$$\frac{1}{r^d}\int_{B_{r,x}} |f - \overline{f}_{r,x}|^2 \;\le\; \frac{c}{r^{d-2}}\int_{B_r(x)} |df|^2\,,$$

with c independent of r. Thus if $f \in H^1(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$ open) satisfies the monotonicity property (MP) above in Ω, we have $f \in \mathrm{BMO}(\Omega)$. In order to apply this, we need to identify quantities in $\mathcal{H}^1$. The main examples are terms 'quadratic in the gradient, with determinant structure'.

Theorem 2.4. *Let $u, v \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Then any 'Jacobian minor of order 2':*

$$M_{ij}(du, dv) \;=\; u_{x_i}v_{x_j} - u_{x_j}v_{x_i}$$

is in $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d)$.

Proof (adapted from [6]). We prove the equivalent fact: $du \wedge dv \in \mathcal{H}^1\Omega^2(\mathbb{R}^d)$. For $\varphi \in C^\infty_c(\Omega^2)$ as in the definition of $\mathcal{H}^1$, $x \in \mathbb{R}^d$ and $r > 0$, let

$$\varphi_{r,x}(y) \;=\; \frac{1}{r}\varphi\Big(\frac{y-x}{r}\Big)\,.$$

Choose $0 < \alpha < 2$. $0 < \beta < 2$ such that $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{1}{d}$. Then $\frac{1}{\beta^*} := \frac{1}{\beta} - \frac{1}{d} = 1 - \frac{1}{\alpha}$. Integration by parts yields:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_{r,x}(du\wedge dv)dy \;&=\; -\int_{\mathbb{R}^d}(v - \overline{v}_{r,x})\,d\varphi_{r,x}\wedge du\\
&=\; -\frac{1}{r^n}\int_{B_{r,x}} \frac{1}{r}(v-\overline{v}_{r,x})\,d\varphi\wedge du\\
&\le\; c\frac{1}{r}\Big(\fint_{B_{r,x}} |v-\overline{v}_{r,x}|^{\beta^*}\Big)^{\frac{1}{\beta^*}}\Big(\fint_{B_{r,x}}|du|^\alpha\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\|d\varphi\|_\infty\\
&\le\; c\Big(\fint_{B_{r,x}}|dv|^\beta\Big)^{\frac{1}{\beta}}\Big(\fint_{B_{r,x}}|du|^\alpha\Big)^{\frac{1}{\alpha}}
\end{aligned}$$

(by the Sobolev-Poincaré inequality). Thus:

$$\begin{aligned}
\sup_{r>0}\Big|\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_{r,x}(du\wedge dv)\Big| \;&\le\; c\big\{M[|du|^\alpha](x)\big\}^{\frac{1}{\alpha}}\big\{M[|dv|^\beta](x)\big\}^{\frac{1}{\beta}}\\
&\le\; c\big\{M[|du|^2](x)\big\}^{\frac{1}{2}}\big\{M[|dv|^2(x)\big\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(since $0 < \alpha < 2, 0 < \beta < 2$), where $M[f](x) = \sup_{r>0}\fint_{B_r(x)}|f|$ is the Hardy-Littlewood maximal function (which satisfies $M[f] \le \|f\|$ a.e.). We conclude:

$$\|du\wedge dv\|_{\mathcal{H}^1} \;\le\; c\,\|du\|_{L^2}\|dv\|_{L^2}\,.$$

Corollary 2.5. *If $w \in BMO(\mathbb{R}^d)\otimes\Omega^2$, $u, v \in H^1(\mathbb{R}^d)$:*

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^d}(du\wedge dv)\cdot w\Big| \;\le\; \|du\|_{L^2}\|dv\|_{L^2}\,[w]_{\mathrm{BMOsm}(\mathbb{R}^d)}\,.$$

The following 'localized version' of Corollary 2.5 is useful in the applications.

Lemma 2.6 [2]. *Let $u, v \in (H^1_0 \cap L^\infty)(B_r)$, $w \in BMO(B_{2r})$. Then:*

$$\Big|\int_{B_r}(du\wedge dv)\cdot w\Big| \;\le\; c\,\|du\|_{L^2(B_r)}\|dv\|_{L^2(B_r)}\,[w]_{\mathrm{BMOsm}(B_{2r})}$$

(with c independent of r).

As observed previously, if $d = 2$ $H^1(B_{2r})$ embeds in $\mathrm{BMO}(B_{2r})$, so we obtain:

Theorem 2.7 [24], [3]. *Assume $d = 2$.*
(i) *Let $u, v \in (H^1_0 \cap L^\infty)(B_r)$. Then $du \wedge dv \in H^{-1}(B_r)$.*
(ii) *If M is a closed surface and $u, v \in (H^1_0 \cap L^\infty)(M)$, then $du \wedge dv \in H^{-1}(M)$.*

2.2 Determinant structure.

There are other quadratic gradient terms whose components have the structure of 2×2 Jacobian minors. It is often easier to exhibit this structure through the formalism of exterior differential calculus. For example, if $\beta \in \Omega^2(\mathbb{R}^d)$ and δ denotes the (Euclidean) adjoint of the exterior derivative,

$$\delta\beta = -\sum_{i<j}\left(\frac{\partial B_{ij}}{\partial x^i}dx^j - \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x^j}dx^i\right) \qquad \text{if} \quad \beta = \sum_{i<j}\beta_{ij}dx^i \wedge dx^j$$

so

$$\delta\beta \cdot du = -\sum_{i<j}\left(\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x^i}\frac{\partial u}{\partial x^j} - \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^i}\right)$$

also has a structure of a '2×2 Jacobian minor'. Thus as in (ii) above, we have:

(iii) If M is a closed surface, $u \in (H^1 \cap L^\infty)(M)$, $\beta \in (H^1 \cap L^\infty)\Omega^2_M$, then $du \cdot \delta\beta \in H^{-1}(M)$.

(It is easy to see that this still holds. Also inner products and δ are taken with respect to a Riemannian metric on M.)

In the case $N = S^k$, we have (with $u = (u^1, \dots, u^{k+1}) \in \mathbb{R}^k$, $|u| = 1$)

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_M A^i(du, du) &= u^i \sum_j |du^j|^2 \\ &= \sum_j (u^i du^j - u^j du^i) \cdot du^j = \sum_j \omega_{ij} \cdot du^j,\end{aligned}$$

where $\omega_{ij} = u^i du^j - u^j du^i \in L^2\Omega^1_M$ (we used $\sum_j u^j du^j = \frac{1}{2}d|u|^2 = 0$).

Now assume $M = S^2$ (in the general case, harmonic 1-forms would enter the Hodge decomposition below, with no major changes in the argument). Notice that:

$$\delta\omega_{ij} = -u^i \Delta u^j + u^j \Delta u^i = 0,$$

since $-\Delta u^i = u^i |\nabla u|^2$ (we assume u is a weak solution of (HM)). Hence (by Hodge theory) $\omega_{ij} = \delta B_{ij}$ with $B_{ij} \in H^1\Omega^2_M$. Note that:

$$-\Delta B_{ij} = 2de_i \wedge de_j \in \mathcal{H}^1\Omega^2_M,$$

hence $B_{ij} \in W^{2,1} \hookrightarrow C^0$, since $d = 2$. We have:

$$-\Delta u^i = \sum_j \delta B_{ij} \cdot du^j, \qquad \text{(HM')}$$

where $\delta B_{ij} \cdot du^j \in \mathcal{H}^1(M)$ by theorem 2.7. Hence (by linear elliptic theory) $u \in W^{2,1}(M, \mathbb{R}^{k+1})$, and since $d = 2$, this implies $u \in C^0(M, \mathbb{R}^{k+1})$. From this the smoothness of u follows from earlier regularity theorems (see e.g., [17]).

To deal with the case of *general target spaces* N, Hélein makes the following crucial observation: we may assume N is *parallelizable* (otherwise change the metric in a tubular neighborhood to a product metric and take the double of the resulting manifold with boundary, obtaining a new parallelizable target N_1 containing N as a totally geodesic submanifold; so u is a harmonic map to N_1).

Thus we have a global orthonormal frame on N. Composing with $u : M \to N$ we obtain k orthonormal vector fields $\overline{e}_i \in H^1(M, \mathbb{R}^p)$, $\overline{e}_i(x) \in T_{u(x)}N$ a.e. (we refer to this as an orthonormal frame adapted to u). Now let $(e_i) \in H^1(M, \mathbb{R}^p)$ be an arbitrary o.n. frame adapted to u. Defining $\theta_i = \langle du, e_i\rangle \in L^2\Omega^1_M$ and $\omega_{ij} = \langle de_i, e_j\rangle \in L^2\Omega^1_M$, we obtain (since $-\Delta u(x) \in (T_{u(x)}N)^\perp$ weakly):

$$\begin{cases} \delta\theta_i = -\sum_j \omega_{ij} \cdot \theta_j, \\ d\theta_i = \sum \omega_{ij} \wedge \theta_j, \end{cases} \qquad \text{(HS)}$$

for $i = 1, \dots, k$. (HS) is sometimes referred to as a 'Hodge system'. The second equation in (HS) may be written as:

$$d\theta_i = -du \wedge de_i,$$

whose right-hand side has 'determinant structure' (and is in $\mathcal{H}^1(M)$). To deal with the first equation, we have to consider 'optimal' frames. Namely, a 'gauge transformation' $g \in H^1(M, SO(k))$ changes the frame $\overline{e}_i$ to $e_i = g_{ij}\overline{e}_j$, with 'connection 1-forms' $\omega_{ij} = \langle de_i, e_j\rangle$ related to $\overline{\omega}_{ij} = \langle d\overline{e}_i, \overline{e}_j\rangle$ by $\omega = dgg^t + g\overline{\omega}g^t$ (as matrices). Consider the variational problem:

$$\text{minimize} \quad F(g) = \int_M |\omega|^2 dx, \qquad g \in H^1(M, SO(k)),$$

where $|\omega|^2 = \sum_{i,j} |\omega_{ij}|^2$. The Euler-Lagrange equation is:

$$\delta\omega_{ij} = 0, \quad i, j = 1, \dots, k.$$

Thus, taking a minimizer g (easily seen to exist) we obtain, from Hodge theory (still in the case $M = S^2$):

$$\omega_{ij} = \delta B_{ij}, \qquad B_{ij} \in H^1\Omega^2_M.$$

The first equation in (HS) may now be written as

$$\delta\theta_i = -\sum_j \langle \delta B_{ij} \cdot du, e_j\rangle.$$

Finally, considering the Hodge decomposition $\theta_i = d\alpha_i + \delta\beta_i$ of θ_i we obtain

$$\begin{cases} -\Delta\alpha_i &= -\sum_j \langle \delta B_{ij} \cdot du, e_j \rangle \\ -\Delta\beta_i &= -du \wedge de_i \end{cases} \qquad \text{(HS')}$$

Unfortunately we have not quite succeeded, since (due to the presence of the e_j's), the right-hand side of the first equation is a priori *not* in $\mathcal{H}^1$. Nonetheless, a more delicate argument (using the complex structure of M) enabled Hélein to prove a statement equivalent to the following.

Lemma 2.8. *There exist $\varepsilon_0 > 0$ such that if $\|\omega_{ij}\|_{L^2} < \varepsilon_0$,* (HS) *has k linearly independent solutions $\eta_1, \ldots, \eta_k$ in $L^\infty \Omega^1_M$.*

We refer to [15] for the conclusion of the proof. The reduction to (HS') is also used in the proof of Bethuel's partial regularity result [2], and there the same problem is circumvented through the use of Morrey–Campanato spaces.

§3 Harmonic map flow

In this section we outline the proof of uniqueness of weak solutions of the harmonic map flow (HMF) in the class

$$\mathcal{H} = \{u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ H^1(M,N)) \mid u_t \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, L^2(M, \mathbb{R}^p))\},$$

for spherical targets ($N = S^k$). The equation is:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= u|\nabla u|^2, \qquad u : M \times I \to S^k \\ u(\cdot, 0) &= u_0, \end{cases}$$

where $I = [0,T]$ is a time interval. We have the following *a priori* estimates (for smooth solutions)

$$E(u(t)) + \int_0^t \int_M |u_t|^2 dx dt = E(u_0), \qquad \text{(energy identity)}$$

and its local version (where $E(u(t), B) = \frac{1}{2}\int_B |du|^2(x,t)dx$):

$$E(u(t), B_R) \le E(u_0, B_{2R}) + c\frac{t}{R^2} E_0 .$$

In *dimension two* we also have:

Lemma 3.1 [22]. *Given $\varepsilon > 0$, we may find T_1, R_1 such that*

$$\sup_{x \in M} E(u_0, B_{2R_1}(x)) < \varepsilon \qquad \text{and} \qquad \sup_{x \in M} E(u(t), B_{R_1}(x)) < \varepsilon,$$

for all $t \in [0, T_1]$. This implies

$$\int_0^{T_1} \int_M |\nabla^2 u|^2 dx dt \le c\left(1 + \frac{T_1}{R_1^2}\right).$$

Informally this means we have a $W^{2,2}$ estimate for u provided we can control 'energy concentration'.

This leads one to consider the spaces:

$$V^T = \mathcal{H} \cap L^2([0,T]; W^{2,2}(M;N)).$$

In dimension 2, we have the following global existence theorem for weak solutions:

Theorem 3.2 (Struwe) **[22].** *Let $u_0 \in H^1(M,N)$, where M is a compact surface without boundary. There exists $T_0 > 0$ and a solution $v \in \cap_{0<T<T_0} V^T$ of* (HMF). *In addition:*

(i) *v is smooth in $M \times (0, T_0]$, except for finitely many points (x_i, T_0);*
(ii) *$E_v(t)$ is finite for $t \in [0, T_0]$, non-increasing in t;*
(iii) *v is the unique solution of* (HMF) *in $\cap_{0<T<T_0} V^T$ (with initial data u_0);*
(iv) *v can be continued to a global weak solution $v \in \mathcal{H}$ with finite singular set in $M \times (0, \infty)$.*

The uniqueness statement (iii) can be improved; in fact we have uniqueness of weak solutions in $\mathcal{H}$ under a mild additional hypothesis.

Theorem 3.3 [9], [10]. *Let M be a compact surface without boundary, and $N^k \subset \mathbb{R}^p$ a compact submanifold. Let $u \in \mathcal{H}$ be a solution of* (HMF) *satisfying the following energy inequality: $E(u(t))$ is non-increasing in t. Then for some $T_1 > 0$, $u \in L^4([0,T_1]; W^{2,4/3})$.*

Corollary 3.4. *If $u \in \mathcal{H}$ is a solution of* (HMF) *satisfying the energy inequality, then u coincides with Struwe's solution* a.e. *(in particular, u has finite singular set in $M \times (0, \infty)$).*

For the corollary, observe that if $u \in L^4([0,T_1], W^{2,4/3})$, then

$$u|du|^2 \in L^2(M \times [0,T_1]).$$

Then linear parabolic theory implies

$$u \in L^2([0,T], W^{2,2}(M;N)),$$

that is, $u \in V^{T_1}$. By (iii) above, u coincides a.e. with Struwe's solution in $[0,T_1]$. Now we may repeat the argument, starting at T_1.

We remark that the partial regularity result is optimal, since examples show that (even if u_0 is smooth) singularities may develop in finite time (see [4]).

Proof of theorem (outline).

Assume $M = S^2$, $N = S^k$.

The proof consists of two steps. First we use Hélein's argument to write the equation (HMF) in the form:

$$u_t^i - \Delta u^i \;=\; \sum_{j=1}^{k+1} \delta\beta_{ij} \cdot du^j \qquad \text{(HMF')}$$

where $\beta_{ij} \in H^1\Omega_M^2$. Note that by Theorem 2.7, the right-hand side of this equation is in $H^{-1}(M)$. The second step is a 'perturbation' argument. Given $\varepsilon > 0$, it is not hard to show (using the energy inequality) that for some $T_1 > 0$ we have the decomposition in $M \times [0, T_1]$:

$$\beta_{ij}(t) \;=\; \hat{\beta}_{ij} + \tilde{\beta}_{ij}(t)\,,$$

where $\hat{\beta}_{ij}(t) \in H^1\Omega_M^2$ with $\|\hat{\beta}_{ij}(t)\|_{H^1} < \varepsilon$ for a.e. $t \in [0, T_1]$ and $\tilde{\beta}_{ij} \in C^\infty\Omega_M^2$ with $\|\tilde{\beta}_{ij}\|_{C^2} \le cE_0$. Thus we may rewrite the equation above in the form:

$$u_t^i - \Delta u^i \;=\; \sum_j \delta\hat{\beta}_{ij} \cdot du^j + f^i. \qquad \text{(HMF'')}$$

with $f^i \in L^4(I_1, L^{4/3}(M)) \hookrightarrow L^2(I_1, H^{-1}(M))$ (since $H^1 \hookrightarrow L^4$ in dimension 2; we let $I_1 = [0, T_1]$). Now an argument based on the inverse function theorem and linear parabolic theory shows that (for $\varepsilon > 0$ small enough) on the one hand (HMF'') has solutions in $L^4(I_1, W^{2,4/3})$; and on the other (again for $\varepsilon > 0$ small) that solutions in $L^2(I_1, H^1)$ are *unique*. The key observation is that $\delta\tilde{\beta}_{ij} \cdot du^j \in L^4(L^{4/3})$ if $u \in L^4(I_1, W^{2,4/3})$ (since $W^{2,4/3} \hookrightarrow W^{1,4}$), and also $\delta\hat{\beta}_{ij} \cdot du^j \in L^2(I_1, H^{-1})$ (by the determinant structure, Theorem 2.7). (Note that by construction $\|\delta\hat{\beta}_{ij}(t)\|_{L^2} < \varepsilon$ for a.e. $t \in [0, T_1]$.) Thus we conclude that the given solution $u \in L^4(I_1, W^{2,4/3})$.

Remarks on the extension to general targets [10].

The key step is to prove an improved regularity lemma for each fixed time: for some $T_1 > 0$, we have $du(t) \in L^4\Omega_M^1$ for a.e. $t \in [0, T_1]$, and

$$\|du(t)\|_4 \;\le\; c(1 + \|u_t(t)\|_2)\,.$$

In particular $du \in L^2([0, T_1], L^4\Omega_M^1)$. With respect to background orthonormal tangent frames $(\overline{e}_i)_{i=1}^k$ and normal frames $(\overline{e}_a)_{a=k+1}^p$ on N, we may write

$$u_t - \Delta u \;=\; \sum \langle du \cdot \overline{\omega}_{ia}, \overline{e}_i \rangle \cdot \overline{e}_a, \qquad \text{(HMF''')}$$

with $\overline{\omega}_{ia} = \langle d\overline{e}_i, \overline{e}_a \rangle$. Notice that (since $\overline{\omega}_{ia} \in L^\infty(I_1, L^2)$ and $du \in L^2(I_1, L^4)$, the right-hand side is in $L^2(I_1, L^{4/3})$. A perturbation argument as before yields $u \in L^4([0, T_1], W^{2,4/3})$ (we use existence for (HMF''') in $L^4(I_1, W^{2,4/3})$ and uniqueness in $L^2(I_1, W^{2,4/3})$).

The proof of 'space regularity' for fixed time uses lemma 2.8 (existence of a system of L^∞ solutions) of Hélein; in an adapted optimal frame, we have

$$\begin{cases} \delta\theta_i \;=\; -\sum \omega_{ij} \cdot \theta_j + f_i \\ d\theta_i \;=\; -\sum \omega_{ij} \wedge \theta_j, \end{cases}$$

with $f_i = \langle u_t, e_i \rangle \in L2(I_1, L^2)$. For $\|\omega_{ij}\|_2(t) < \varepsilon_0$, we apply Hélein's lemma to conclude $\theta_i \in L^4\Omega_M^1$.

Higher-dimensional case.

If $d \ge 3$, there are two 'energy monotonicity' conditions which are satisfied by smooth solutions:

(I) ENERGY INEQUALITY

$$E(u(t)) + \int_0^t \int_M |u_t|^2 dx ds \;\le\; cE(u_0)$$

(II) WEIGHTED ENERGY INEQUALITY
The quantity

$$\Psi(R) \;=\; \frac{1}{2} \int_{P_r(x,t)} |du|^2(y,s)\, p_{(x,t)}(y,s)\, dy ds$$

is 'essentially non-decreasing' in r (see [23] for the precise statement). Here P_r denotes a 'parabolic ball' and $p_{(x,t)}$ is the backwards heat kernel of M.

Existence of partially regular weak solutions was proved by Chen-Struwe [5]. It is not clear which conditions would imply uniqueness; (I) and (II) do not suffice, by recent work of S. Angenent and T. Ilmanen. However, we have:

Conjecture. Let $d \ge 3$. A weak solution of (HMF) in $\mathcal{H}$ satisfying (I) and (II) is smooth outside of a closed set of Hausdorff dimension at most d (in the parabolic metric).

For $N = S^k$, this has been proved by Feldman [8].

§4 Wave maps and weak compactness

In this section we let $M = \mathbb{R}^d$ and consider weak solutions on $M \times \mathbb{R}$ of the wave map problem with values in a compact manifold $N^k \subset \mathbb{R}^p$:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= \mathrm{tr}_M A(du, du) - A(u_t, u_t) \\ (u, u_t)|_{t=0} &= (u_0, u_1) : \mathbb{R}^d \to \mathrm{T}N. \end{cases} \tag{WM}$$

Global existence of weak solutions of the Cauchy problem (WM) is still open, except in the cases $N = S^k$ [21] and $N = SO(k)$ [11]. Precisely, we have:

Theorem 4.1 [11]. *Suppose N is a compact semisimple Lie group G and let $(u_0, u_1) \in H^1_c(M; \mathrm{T}N)$. Then there exists a global weak solution of* (WM) *of class H^1 (that is, $u(t) \in H^1(M, N)$ and $u_t(t) \in L^2(M, \mathbb{R}^p)$ locally uniformly in $t \in \mathbb{R}$).*

The theorems in [21] and [2] are proved by a 'penalty method'. It seems likely that related arguments can be used to prove global existence in H^1 class for compact homogeneous targets.

While global existence for general targets has not yet been shown, it is conceivable that a penalty method will still work. What is needed are good 'approximate solutions' and a compactness theorem for approximate solutions. In dimension $d = 2$, a weak compactness theorem for approximate solutions of the elliptic problem ('Palais-Smale sequences for the energy') has been proved by Bethuel [1]. It turns out that the method of adapted orthonormal frames and 'concentration compactness' arguments can be used to give a simpler proof of Bethuel's
theorem, and also to obtain a weak compactness theorem for (WM) when $d = 2$. The only condition needed is uniform boundedness of the 'spacetime energy':

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \int_M \left[|du(t)|^2 + |u_t(t)|^2 \right] dx$$

Theorem 4.2 [12]. *Let $u^n : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to N$ be a sequence of smooth maps satisfying*

$$u^n_{tt} - \Delta u^n = \mathrm{tr}_M A(du^n, du^n) - A(u^n_t, u^n_t)$$

in the distribution sense, and the energy bound:

$$E(u^n(t)) \leq E_0 .$$

Let $u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to N$ be the limiting H^1 map (that is, $u^n \to u$ in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ and $(du^n, u^n_t) \rightharpoonup (du, u_t)$ weakly- in $L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^2))$). Then u is a weak wave map, that is, satisfies* (WM) *in the distribution sense.*

The *outline of proof* is as follows:
We construct locally an optimal adopted orthonormal frame (e^n_i) for u^n, in the

elliptic sense in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ (that is, $\overline{\delta}_{\mathrm{eucl}}\, \omega^n_{ij} = 0$, where $\omega^n_{ij} = \langle \overline{d} e^n_i, e^n_j \rangle$ and $\overline{\delta}_{\mathrm{eucl}}$ is the euclidean adjoint of the space-time differential $\overline{d} = (d, \frac{\partial}{\partial t})$). As in the preceding sections, the equation satisfied by u^n may be written in the form:

$$\delta \theta^n_i = -\sum_j \omega^n_{ij} \cdot \theta^n_j$$

The 'Coulomb gauge' condition $\overline{\delta}_{\mathrm{eucl}}\, \omega^n_{ij} = 0$ and $\mathcal{H}^1$–BMO estimates can be combined to show weak convergence of the term $\omega^n_{ij} \cdot \theta^n_j$. It is important in the proof to consider the 'energy concentration set' for given $\varepsilon > 0$:

$$S_\varepsilon = \left\{ (x,t) \in Q \;\middle|\; \forall R > 0 \ \limsup_{n \to \infty} E(u^n(t); B_r(x) \geq \varepsilon \right\},$$

where $Q \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ is a compact set. This set turns out to have zero H^1–capacity, so we only need to consider 'test functions' supported away from S_ε.

In fact one has the following result, which may be of independent interest:

Lemma 4.3. *Under the hypothesis of the theorem, the set S_ε is a union of K Lipschitz-1 graphs over the time axis, where $K = [E_0/\varepsilon]$.*

References

[1] F. Bethuel, *Weak limits of Palais-Smale sequences for a class of critical functionals*, Calc. Var. Partial Differential Equations **1** no. 3 (1993), 267–310.

[2] ———, *On the singular set of stationary harmonic maps*, Manuscripta Math. **78** no. 4 (1993), 417–443.

[3] H. Brézis, J-M. Coron, *Multiple solutions of H-systems and Rellich's conjecture*, Comm. Pure Appl. Math. **37** no. 2 (1984), 149–188.

[4] K.-C. Chang, W.-Y. Ding, R. Ye, *Finite-time blow-up of the heat flow of harmonic maps from surfaces*, J. Differential Geom. **36** no. 2 (1992), 507–515.

[5] Y. Chen, M. Struwe, *Existence and partial regularity results for the heat flow for harmonic maps*, Math. Z. **201** no. 1 (1989), 83–103.

[6] R. Coifman, P. L. Lions, Y. Meyer, S. Semmes, *Compensated compactness and Hardy spaces*, J. Math. Pures Appl. (9) **72** no. 3 (1993), 247–286.

[7] L. C. Evans, *Partial regularity for stationary harmonic maps into spheres*, Arch. Rational Mech. Anal. **116** (1991), 101–163.

[8] M. Feldman, *Partial regularity for harmonic maps of evolution into spheres*, Comm. Partial Differential Equations **19** no. 5 & 6 (1994), 761–790.

[9] A. Freire, *Uniqueness for the harmonic map flow in two dimensions*, Calc. Var. Partial Differential Equations **3** (1995), 95–105.

[10] ———, *Uniqueness for the harmonic map flow from surfaces to general targets*, Comm. Math. Helv. **70** no. 2 (1995), 310–338.

[11] ———, *The Cauchy problem for wave maps to compact Lie groups*, in preparation.

[12] A. Freire, S. Müller, M. Struwe, *Weak convergence of harmonic maps from (2+1)-dimensional Minkowski space to Riemannian manifolds*, preprint.

[13] M. Giaquinta, E. Giusti, *The singular set of the minima of certain quadratic functionals*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **11** no. 1 (1984), 45–55.

[14] F. Hélein, *Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une sphère*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **311** no. 9 (1990), 519–524.
[15] ———, *Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une variété riemannienne*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **312** no. 8 (1991), 591–596.
[16] ———, *Regularity of weakly harmonic maps from a surface into a manifold with symmetries*, Manuscripta Math. **70** no. 2 (1991), 203–218.
[17] S. Hildebrandt, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Lecture Notes in Math., vol. 1161, Springer-Verlag, 1985.
[18] R. Schoen, *Analytic aspects of the harmonic map problem*, MSRI Publ. 2 (1984), Springer - Verlag.
[19] R. S. Schoen, K. Uhlenbeck, *A regularity theory for harmonic maps*, J. Differential Geom. **17** no. 2 (1982), 307–335; *Correction to "A regularity theory for harmonic maps"* **18** no. 2 (1983), 329.
[20] S. Semmes, *A primer on Hardy spaces, and some remarks on a theorem of Evans and Müller*, Comm. Partial Differential Equations **18** no. 1 & 2 (1994), 277–319.
[21] J. Shatah, *Weak solutions and development of singularities in the $SU(2)$ σ-model*, Comm. Pure Appl. Math. **41** no. 4 (1988), 459–469.
[22] M. Struwe, *On the evolution of harmonic maps of Riemannian surfaces*, Comment. Math. Helv. **60** no. 4 (1985), 558–581.
[23] ———, *On the evolution of harmonic maps in higher dimensions*, J. Differential Geom. **28** no. 3 (1988), 485–502.
[24] H. C. Wente, *The differential equation $\Delta x = 2H(x_u \wedge x_v)$ with vanishing boundary values*, Proc. Amer. Math. Soc. **50** (1975), 131–137.

ALEXANDRE FREIRE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
MATHEMATICS DEPARTMENT
KNOXVILLE, TN 37996-1300
USA

Memorias III Escuela de Verano
Geometría Diferencial
Ecuaciones Diferenciales Parciales
y Análisis Numérico
Universidad de los Andes, 20 a 30 de junio de 1995
páginas 29–43

Tantrices de lazos planos proyectivos

BRUCE SOLOMON

Indiana University, USA

§1 Introducción

Los planos proyectivos sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ (los cuaterniones) y $\mathbb{O}$ (los octoniones, o números de Cayley) presentan muchos fenómenos bien interesantes en la geometría diferencial. Aquí me gustaría concentrarme en una clase especial de *lazos* en los planos proyectivos *reales*, a los cuales he dado el nombre de *tantrices* — una abreviación de dos palabras inglesas: "tangent indicatrices." El tema análogo en $\mathbb{CP}^2$ (el plano proyectivo complejo) ha sido estudiado desde el punto de visto de aplicaciones armónicas y superficies minimales por Chern & Wolfson [CW], y otros, pero el caso real, aunque muy elemental y distinto del caso complejo, realmente no habia sido estudiado; lo presentaremos aquí. Tal vez sería provechoso estudiar, en algún futuro, tantrices en los planos proyectivos sobre $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$.

1.1 Definición extrínseca. Generalmente, cuando hablamos de un *plano proyectivo real*, nos referimos a $\mathbb{RP}^2$: el espacio de líneas en $\mathbb{R}^3$. Pero aquí quisiera empezar con una situación más familiar: el espacio de líneas *orientadas* en $\mathbb{R}^3$, el cual corresponde isometricamente a S^2, la esfera de radio 1 en $\mathbb{R}^3$. Consideremos en ella cualquier lazo regular; o sea, cualquier inmersión $\sigma : S^1 \to S^2$. Para cálculos, será más fácil mirar tal lazo como una aplicación

que envía un intervalo a S^2 con rapidez 1, y que manda ambos puntos terminales suavemente al mismo lugar, así:

$$\sigma : [0, L] \to S^2 , \quad |\dot\sigma| \equiv 1 , \quad \begin{matrix} \sigma(0) = \sigma(L) \\ \dot\sigma(0) = \dot\sigma(L) \end{matrix}$$

Observemos que $|\dot\sigma| \equiv 1$ implica que $\dot\sigma$ también queda en S^2, y así define un nuevo lazo en S^2 al cual llamaremos τ, la **tantriz** de σ:

$$\tau : S^1 \to S^2 , \qquad \tau(s) := \dot\sigma(s)$$

1.2 Definición intrínseca. Definiendo la tantriz así, sacamos provecho de la inclusión canónica de S^2 en $\mathbb{R}^3$. En particular, miramos la velocidad de la curva σ en S^2 como un vector unitario en $\mathbb{R}^3$; tal vector traza otra curva en S^2. El empleo de la geometría *extrínseca* para definir la tantriz también será muy util para estudiarla. Pero es importante — para entender qué sería una "tantriz" en los otros planos proyectivos, los cuales no se encuentran encajados naturalmente en $\mathbb{R}^n$ —darse cuenta que en realidad, la tantriz pertenece a la geometría proyectiva *intrínseca*.

Para ver eso, hay que usar la *dualidad* entre puntos y líneas que ocurre en todo plano proyectivo. Por ejemplo, en el plano proyectivo de líneas orientadas en $\mathbb{R}^3$ (es decir S^2), una línea proyectiva es un círculo máximo orientado. Tal círculo conforma la frontera orientada de una semi-esfera, y el "polo" de esa semi-esfera — el punto a distancia $\pi/2$ de cada punto del círculo — es el punto *dual* del círculo, y vice-versa. Usando la métrica canónica en un plano proyectivo, (la cual nos permite decidir si dos líneas son *perpendiculares* en dicho plano), la noción de dualidad nos deja definir intrinsecamente la tantriz de una "curva" en cualquier plano proyectivo asi:

1.3 Definición. A cada punto p de una curva σ en un plano proyectivo, podemos asociar el punto dual de la línea *normal* a la línea tangente a σ en p. Al conjunto de todos los puntos obtenidos así es lo que llamamos la **tantriz** de σ.

(La palabra "curva" debe aparecer en comillas arriba porque en general, queremos que refiera a una subvariedad de dimensión 1 sobre el campo apropriado. Por ejemplo, en $\mathbb{CP}^2$, se necesita trabajar con *curvas holomórficas* — que del punto de vista real, son superficies de dimensión 2 — para que la definición tenga sentido.)

Dejamos al lector verificar que en S^2, el vector velocidad $\dot\sigma(t)$ de una curva σ de rapidez uno indica precisamente el punto dual al círculo máximo normal a σ en el punto $\sigma(t)$. Es decir, vemos que la definición extrínseca coincide con la definición intrínseca en el caso de S^2.

Sin embargo, la definición extrínseca hace mucho más elemental analizar las tantrices de S^2. Por ejemplo, tenemos de inmediato lo siguiente:

1.4 Observación. *La tantriz de un lazo inmerso en un plano proyectivo siempre da otro lazo* **inmerso** *en dicho plano.*

Comentario. Estableceremos aquí el resultado en S^2. El caso de $\mathbb{RP}^2$ seguirá de inmediato, gracias a la Proposición 4.4. Aunque el resultado se tiene para los otros planos también, solo lo citaremos aquí referente a S^2 y $\mathbb{RP}^2$.

Demostración. Una curva en S^2 es inmersa si y solo si se le puede parametrizar con velocidad no nula. Ya que $\tau := \dot\sigma$, tenemos que $\dot\tau = \ddot\sigma$. La desigualdad de Cauchy-Schwarz, con la regla de Leibniz da entonces

$$|\dot\tau| \;=\; |\ddot\sigma| \;\geq\; |\ddot\sigma \cdot \sigma| \;=\; \left|(\dot\sigma \cdot \sigma)' - |\dot\sigma|^2\right| \;=\; |0 - 1| \;=\; 1 ,$$

porque $\dot\sigma \cdot \sigma = \frac{1}{2}(|\sigma|^2)' \equiv 0$. Vemos pues que tomar la tantriz de hecho *aumenta* la velocidad. □

La Cuestión. La Observación 1.4 hace muy natural la siguiente pregunta:

> *Cuales curvas compactas en un plano proyectivo son tantrices de otras curvas compactas?*

A pesar de su carácter elemental, el caso más sencillo — el de S^2 — no fue resuelto hasta 1991, cuando Joel Wiener descubrió la respuesta por casualidad mientras clasificaba toros planos en S^3 [W]. Su descubrimiento salió de maquinaria que había construido para estudiar sus toros, y se preguntó en la misma obra si habría un tratamiento elemental. Mientras tanto, sin conocer el trabajo de Wiener, yo había encontrado exactamente tal tratamiento en 1992 [S]. Presentaré este tratamiento aquí, y luego algo nuevo: la soprendente generalización a $\mathbb{RP}^2$.

Empezaremos por investigar por qué no todo lazo en S^2 es una tantriz.

§2 Obstáculos

Es fácil ver que no todo círculo inmerso en S^2 es una tantriz. Por ejemplo, la siguiente observación indica un obstáculo:

2.1 Observación. *Una tantriz no se puede quedar en una semi-esfera abierta.*

Demostración. Sea $\tau := \dot\sigma$ la tantriz de un lazo $\sigma : [0, L] \to S^2$. Entonces

$$(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = (\dot\sigma_1, \dot\sigma_2, \dot\sigma_3)$$

como vector en $\mathbb{R}^3$, y tenemos que

$$\int_0^L \tau_3(s)\, ds \;=\; \int_0^L \dot\sigma(s)\, ds \;=\; \sigma(L) - \sigma(0) \;=\; 0$$

Claramente, no podemos tener $\tau_3(s) > 0$ para todo s; por tanto, τ no se puede quedar en la semi-esfera $x_3 > 0$. Por cambio ortogonal de coordenadas, se tiene lo mismo para cualquier semi-esfera abierta. □

Lo de arriba hace obvio que muchos lazos en S^2 *no* son tantrices. ¿Cuales propiedades nos garantizarán que una curva sí lo sea? La clave queda en una observación elemental, pero apenas obvia, que presentaremos como la Observación 2.3 abajo. Primero, hay que explicar el concepto de *translación paralela* en una superficie.

2.2 Translación paralela. Un campo vectorial X tangente a una variedad riemanniana M a lo largo de una curva γ se llama *paralelo* si y solo si la derivada covariante $\nabla_{\dot\gamma} X$ se anula. Cuando M está inmersa en $\mathbb{R}^n$, decir que $\nabla_{\dot\gamma} X = 0$ es decir no más de que la componente *tangente* de la derivada sencilla, $\frac{d}{dt} X(\gamma(t))$, se anula; o sea, que $\frac{d}{dt} X(\gamma(t))$ está *normal* a M en $\gamma(t)$ para todo t.

La definición arriba implica que translación paralela preserva la métrica, en el sentido siguiente; el lector lo verificará facilmente:

> *Si trasladamos dos vectores paralelmente a lo largo de una curva, su producto escalar referente a la métrica riemanniana no cambia. En particular, translación paralela preserva longitudes, y ángulos entre, vectores.*

Podemos ahora presentar la observación que prometimos arriba; quizás Wiener no cayó en cuenta de este hecho.

2.3 Observación. *Si τ es la tantriz de σ, σ se puede mirar como campo vectorial* paralelo *a lo largo de τ.*

Demostración. Usaremos dos veces un hecho elemental: *El vector normal unitario en cada punto $p \in S^2$ es p mismo, mirado como el vector $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$.* Lo usamos primero para notar que $\sigma(s)$ está *tangente* a S^2 en $\tau(s)$ porque el normal allá es τ, y $\sigma \cdot \tau \equiv 0$ ($\tau = \dot\sigma$, y vimos en la demostración de la Observación 1.4 que $\sigma \cdot \dot\sigma \equiv 0$). Por la misma razón, la derivada $\frac{d}{dt} X(\gamma(t))$ mencionada arriba aparece aquí como $\frac{d}{ds}\sigma(\tau(s)) = \frac{d}{ds}\sigma(s) = \dot\sigma = \tau$, el vector normal a S^2 en τ, como queríamos. □

2.4 Estrategia de inversión. La Observación anterior sugiere un método para "invertir" una tantriz; o sea, construir, dado un lazo τ inmerso en S^2, otro lazo σ del cual τ sea la tantriz. Debemos empezar con un vector unitario tangente a S^2 en algún punto de τ, y entonces trasladar este vector *paralelmente* a lo largo de τ, produciendo así un campo σ en τ. Por fin (aprovechándonos del hecho de que la translación paralela preserva la longitud), miramos σ como un lazo en S^2.

2.5 Los dos obstáculos. Puesto que la derivada de este campo σ, por el paralelismo de σ, debe ser normal a S^2, y puesto que el normal a S^2 en cada punto de τ será ese mismo punto de τ, podemos concluir que la tantriz de σ es τ, exactamente como queremos. Pero a sabiendas de que todo lazo en S^2 no es una tantriz, sabemos que esta construcción sencilla no puede siempre funcionar. De hecho, hay los siguientes dos obstáculos:

- **Inmersión.** *La curva σ así construida pueda fallar en estar* inmersa. *Vimos arriba que la derivada de σ será un multiplo de τ; si el multiplo es 0, perdemos la inmersión.*
- **Holonomía.** *La curva σ así construida pueda fallar en estar* cerrada. *En trasladar un vector inicial paralelmente alrededor de τ, nada garantiza que volveremos al punto inicial con el mismo vector.*

La translación paralela preserva la métrica (vea §2.2 arriba). Efectúa por lo tanto una *isometría lineal* entre los planos tangentes del punto inicial, y del punto terminal, de la curva. Si la curva está cerrada, el punto inicial coincide con el terminal, y la isometría (llamada la *transformación de holonomía*) que resulta en el plano tangente en ese punto, será una rotación o una reflexión. En una superficie orientable como S^2 — la transformación de holonomía también preserva orientación; por lo tanto debe ser una rotación por algún ángulo. Nos referiremos pues al *ángulo de holonomía* del lazo; es el ángulo entre las direcciónes inicial y terminal de cualquier campo paralelo (y no zero) en el lazo.

2.6 Ejemplo. Es fácil dar un ejemplo del primer obstáculo. Sea $\tau(t)$ el ecuador $(\cos t, \sin t, 0)$ en S^2. Entonces el campo constante dado por $\sigma(t) \equiv (0,0,1)$ es un campo tangente a S^2 alrededor de τ, y siendo constante, es claramente *paralelo*. Pero como curva en S^2, σ obviamente no está inmersa.

Por otro lado, el ecuador es una *geodésica*; es decir, una curva para la cual su propio vector de velocidad está paralelo. Aquí, la velocidad es $(-\sin t, \cos t, 0)$, y traza otra vez el ecuador. O sea, con esta escogencia del campo paralelo, vemos que el ecuador sí es una tantriz; su propia tantriz.

Más aún, se sigue de inmediato que para cualquier ángulo $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, el campo $\sigma(t) = \cos\alpha\,(-\sin t, \cos t, 0) + \sin\alpha\,(0,0,1)$ es un campo paralelo a lo largo del ecuador, y su traza es un círculo paralelo al ecuador en S^2, la cual tiene el ecuador como tantriz. Es decir, nuestra "construcción" produce un *intervalo* de lazos que tienen el ecuador como tantriz. Veremos que en S^2, esta situación es típica.

2.7 Ejemplo. El obstáculo de *holonomía* se puede ver en un famoso experimento físico: el péndulo de Foucault. En este experimento, se hace oscilar un péndulo pesado, suspendido por una cuerda larga de un punto fijo y alto sobre la tierra. El péndulo trata de mantenerse dentro de un plano fijo; pero debido a la rotación de nuestro planeta esférico, generalmente no puede. Se observa que el plano vertical en el cual oscila el péndulo gira, lentemente con el pasar de tiempo, y su rata de rotación depende en la latitud donde se hace el experimento. Resulta que oscila en la dirección que sigue una *translación paralela* a lo largo de su círculo de latitud.

En particular, después de 24 horas, el sitio del experimento volverá a su lugar original, pero la dirección de oscilación del péndulo — el resultado de

translación paralela alrededor del círculo de latitud — pueda cambiar. La diferencia constituye el ángulo de holonomía, y su importancia aquí es clara: *si el ángulo de holonomía no es un multiplo de 2π, la curva σ que construyamos por trasladar un vector unitario a lo largo de nuestro círculo τ de latitud no se cerrará.* De hecho, para el ecuador (o cualquier círculo máximo), el ángulo de holonomía se anula; y como vimos arriba, el ecuador sí es una tantriz. Pero todo círculo de radio $0 < r < 1$ en S^2 tiene ángulo de holonomía dado por $2\pi\sqrt{1-r^2}$ (ejercicio), y por tanto no conforma la tantriz de ningún lazo (lo cual ya sabíamos por la Observación 2.1, puesto que tal círculo se queda en una semi-esfera abierta).

2.8 Algunos cálculos. Para investigar los obstáculos de inmersión y holonomía, consideremos un campo vectorial unitario $\sigma(t)$ a lo largo de una curva $\tau(t)$ de rapidez 1 en S^2. Fijémonos en la función ϕ que mide el ángulo entre $\sigma(t)$ y $-\dot\tau(t)$ para cada t en el intervalo de parametrización. Dado que $\tau(t)$ y $\dot\tau(t)$ son siempre ortonormales, podemos definir un vector normal canónico a lo largo de τ: $\nu(t) = \tau(t) \times \dot\tau(t)$. Usamos aquí la orientabilidad de S^2. Podemos pues caracterizar el ángulo ϕ por

$$\sigma(t) \;=\; -\cos\phi(t)\,\dot\tau(t) \;+\; \sin\phi(t)\,\nu(t)$$

Ahora es fácil calcular, usando los hechos elementales

$$\begin{aligned} \ddot\tau\cdot\dot\tau \;&=\; \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\dot\tau|^2 \;=\; 0\,, \qquad \text{y} \\ \ddot\tau\cdot\tau \;&=\; -1 \end{aligned}$$

(la demostración de la Observación 1.4 implica la última identidad) que

$$\dot\sigma \;=\; (\dot\phi - \kappa_g)(\sin\phi\,\dot\tau + \cos\phi\,\nu) \;+\; \cos\phi\,\tau \tag{2.9}$$

donde κ_g da la *curvatura geodésica* de τ, definido así:

$$\kappa_g \;:=\; \ddot\tau\cdot\nu \;=\; -\dot\tau\cdot\dot\nu \tag{2.10}$$

§3 Tantrices en S^2. Conclusiones

La ecuación (2.9) nos dice mucho. En primer lugar, el paralelismo del campo σ a lo largo de τ requiere que $\nabla_{\dot\tau}\sigma$ — la componente de $\dot\sigma$ *tangente* a S^2 — se anule. Esta componente es $(\dot\phi - \kappa_g)(\sin\phi\,\dot\tau + \cos\phi\,\nu)$, *la cual se anula si y solo si* $\dot\phi = \kappa_g$. Tenemos por tanto la siguiente observación:

3.1 Observación. *Sea $\tau(t)$ una curva en S^2 de rapidez 1. Entonces un campo vectorial unitario σ a lo largo de τ estará paralelo sii satisface $\dot\phi = \kappa_g$, donde $\phi(t)$ da el ángulo entre $\sigma(t)$ y $-\dot\tau(t)$.*

Note ahora que si $\tau : [0, L] \to S^2$ esta *cerrada*, y queremos lo mismo de σ, es decir, que $\sigma(L) = \sigma(0)$, entonces necesitamos que $\phi(L) \equiv \phi(0)$, módulo 2π. Pero la Observación 3.1 da

$$\phi(L) - \phi(0) \;=\; \int_0^L \dot\phi\,dt \;=\; \int_0^L \kappa_g\,dt \tag{3.2}$$

La última integral se llama la *curvatura geodésica total* de τ (lo escribiremos $\operatorname{ctg}(\tau)$), y la ecuación (3.2) establece que $\operatorname{ctg}(\tau)$ da su ángulo de holonomía. En consecuencia, deducimos una Proposición que resuelve el problema de holonomía:

3.3 Proposición. *La translación paralela de cualquier vector unitario alrededor de un lazo τ en S^2 produce una curva σ* **cerrada** *en S^2 sii $\operatorname{ctg}(\tau) \equiv 0$ módulo 2π.*

Esta proposición produce lazos *cerrados*, pero generalmente no estarán *inmersos*; todavía nos toca averiguar si, a lo menos para *algún* campo unitario paralelo, obtendremos un lazo inmerso. De nuevo, la ecuación (2.9) resuelva el problema: Para que σ este inmerso, recuerde, necesitamos que $\dot\sigma$ nunca se anule. El paralelísmo requiere que la componente *tangente* sí se anule; queremos pues que la componente *normal* jamás se anule. Por la ecuación (2.9), esta componente viene dada por $(\cos\phi)\,\tau$, lo cual se anula si y solo si ϕ asume uno de los valores $\pm\frac{\pi}{2}$, módulo π. En otras palabras,

3.4 Observación. *La curva $\sigma \subset S^2$ que resulta de la translación paralela de un vector unitario a lo largo de otra curva $\tau \subset S^2$ estará* **inmersa** *sii el ángulo entre $\sigma(t)$ y $-\dot\tau(t)$ se queda siempre estrictamente entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.*

En particular, la *oscilación* del ángulo ϕ — la diferencia entre su máximo y mínimo en τ — debe ser menor que π para que ϕ permanezca siempre en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. De hecho, esta condición necesaria es también suficiente para garantizar que podemos superar el obstáculo de inmersión. Para ver eso, observemos primero que la ecuación (3.2) da la diferencia entre ϕ en los terminales del arco $\tau([a,b])$ $(0 \le a < b \le L)$ como $\operatorname{ctg}(\tau([a,b]))$.

3.5 Definición. Definimos pues la *oscilación de ϕ sobre τ* como el valor absoluto del máximo de todas tales diferencias. Llamando a cualquier tal $\tau([a,b])$ un **sub-arco** de τ, definamos entonces

$$\operatorname{osc}\phi_\tau \;:=\; \sup\left\{ \left| \int_\gamma k_g\,ds \right| : \gamma \text{ es un sub-arco de } \tau \right\}$$

Note que $\operatorname{osc}\phi_\tau$ está bien definido a pesar de que la función ϕ solamente está determinada módulo una constante. De hecho, podemos claramente escoger tal constante, si $\operatorname{osc}\phi_\tau < \pi$, para que $\phi(t)$ siempre se queda en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Por lo tanto, tenemos la siguiente proposición:

3.6 Proposición. *Sea $\tau : [a,b] \to S^2$ una curva inmersa en S^2. Existe un vector unitario $\vec{\sigma}_0$ tangente a S^2 en $\tau(a)$ tal que translación paralela de $\vec{\sigma}_0$ a lo largo de τ traza una curva $\sigma : [a,b] \to S^2$* **inmersa**, *sii* $\operatorname{osc}\phi_\tau < \pi$.

Finalmente, combinando las últimas dos proposiciones, entendemos completamente cuales lazos en S^2 son tantrices de otros lazos en S^2:

3.7 Teorema. *Un lazo τ inmerso en S^2 es la tantriz de otro lazo σ inmerso en S^2 sii* $\operatorname{osc}\phi_\tau < \pi$, *y* $\operatorname{ctg}(\tau) = 0$.

Demostración. Para que σ sea inmerso, la Proposición 3.6 requiere que $\operatorname{osc}\phi_\tau < \pi$. Para que σ sea cerrada, la Proposición 3.3 requiere que $\operatorname{ctg}(\tau)$ sea multiplo de 2π. Si parametrizamos τ sobre el intervalo $[0, L]$, podemos mirar $\tau[0, L]$ como sub-arco de τ, así que $|\operatorname{ctg}(\tau)| \leq \operatorname{osc}\phi_\tau$. El Teorema ahora se sigue, puesto que el unico multiplo de 2π menor que π es 0. □

3.8 Comentario. Bajo los hipótesis del Teorema, es fácil deducir, de hecho, que existe un *intervalo* de longitud $\pi - \operatorname{osc}\phi_\tau > 0$, *cada punto del cual* corresponde a un lazo σ inmerso en S^2 que tiene τ como su tantriz. Vimos este fenomeno (con $\pi - \operatorname{osc}\phi_\tau = \pi$ en el Ejemplo 2.6). Por otro lado, encontraremos que en $\mathbb{RP}^2$, habrá solamente un lazo σ que "invierte" al lazo τ, si τ es homotopicamente *no*-trivial.

Como mencionamos antes, el Teorema 3.7 era desconocido hasta 1991 [W]. Por otro lado, un *corolario* del resultado se conocía hace cien años, bajo el nombre "Teorema de Jacobi". Este resultado aparece hoy en día en varios libros populares de geometría diferencial [Ch], [DoC], [Sp].

3.9 Corolario (Teorema de Jacobi). *El vector normal principal de un lazo en $\mathbb{R}^3$ con curvatura $\kappa > 0$ traza una curva cerrada en S^2 que, si está encajada, divide S^2 en dos pedazos de áreas iguales.*

Demostración. Sea γ un lazo inmerso en $\mathbb{R}^3$ con rapidez 1. El vector normal principal $\mathbf{n}$, y la curvatura κ de γ, están definidos por la sencilla relación $\dot{\mathbf{t}} = \kappa\mathbf{n}$, donde $\mathbf{t} := \dot{\gamma}$ es el vector velocidad de γ. Vemos de inmediato que $\mathbf{n}$ describe la tantriz del lazo en S^2 trazado por $\mathbf{t}$, y por lo tanto, su curvatura geodésica total se anula, por el Teorema. Más aún, estando encajada en la esfera, $\mathbf{n}$ la divide en dos regiones, y conforma la frontera orientada de una de ellas, digamos Ω. La curvatura de Gauss de S^2 se iguala constantemente a 1, así que podemos calcular el área $|\Omega|$ de Ω de la manera siguiente:

$$|\Omega| \;=\; \int_\Omega K\,dA \;=\; 2\pi - \int_{\partial\Omega} \kappa_g\,ds \;=\; 2\pi - 0 \;=\; \frac{1}{2}|S^2|$$

por el Teorema de Gauss-Bonnet. □

Se puede decir más acerca de tantrices en S^2. Por ejemplo, un lazo y su tantriz siempre pertenecen a la misma clase de *homotopía regular* en S^2, donde hay dos de tales clases. (Dos curvas inmersas en una variedad son

regularmente homotopicas si y solo si se pueden deformar la una a la otra por curvas *inmersas*.) Referimos al lector al artículo [S] para detalles al respecto.

§4 Tantrices en $\mathbb{RP}^2$

El plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$ es la variedad de todas las líneas por el origen en $\mathbb{R}^3$. Cada una de estas línea intersecta la esfera S^2 en un par de puntos antipodales; podemos pues mirar $\mathbb{RP}^2$ como cociente de la esfera por el grupo $\mathbb{Z}_2$ generado por la aplicación antipodal: $\mathbb{RP}^2 := S^2/\mathbb{Z}_2$. Denotemos por Π la proyección canónica

$$\Pi : S^2 \to \mathbb{RP}^2\,, \qquad \Pi(\mathbf{x}) \;:=\; \{\pm\mathbf{x}\} \quad \text{(conjunto de dos puntos)}.$$

Por insistir que Π sea una *isometría local*, determinamos la métrica canónica en $\mathbb{RP}^2$; localmente, $\mathbb{RP}^2$ y S^2 son los mismos. Pero al pesar de esta semejanza local, la clasificación de tantrices en $\mathbb{RP}^2$ resulta ser bien diferente que en S^2 por razones *globales*: $\mathbb{RP}^2$ tiene lazos que no son homotopicamente triviales. Este fenómeno no ocurre en S^2, y produce resultados soprendentes referente a las tantrices en $\mathbb{RP}^2$.

4.1 Clases de lazos en $\mathbb{RP}^2$. La relación $\mathbb{RP}^2 := S^2/\mathbb{Z}_2$ implica que el primer grupo de homotopía de $\mathbb{RP}^2$ es $\mathbb{Z}_2$: $\pi_1(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}_2$. En particular, $\mathbb{RP}^2$ tiene S^2 como su *cubierta universal*, y en consecuencia, existe una relación estrecha entre las curvas de las dos superficies. Vemos también que $\mathbb{RP}^2$ posee exactamente dos clases de lazos en el sentido de homotopía; los lazos triviales, y los no-triviales.

Un lazo se llama *trivial* si y solo si se lo puede deformar continuamente a un lazo constante — un punto — en $\mathbb{RP}^2$. La teoría básica del grupo fundamental nos advierte que los lazos triviales son precisamente los que podemos *levantar* a *lazos* en S^2:

> *Se puede levantar cualquier lazo σ* trivial *en $\mathbb{RP}^2$ a un lazo $\tilde{\sigma}$ en S^2. O sea, para cada $\sigma \subset \mathbb{RP}^2$ trivial, existe un lazo $\tilde{\sigma} \subset S^2$ tal que $\Pi \circ \tilde{\sigma} = \sigma$.*

Los lazos *no-triviales*, por otro lado, son los que *no* son homotopicamente constante en $\mathbb{RP}^2$, y *no* se pueden levantar a lazos en S^2. No obstante, el hecho de que $\pi_1(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}_2$ implica lo siguiente,

> *Dos veces cualquier lazo no-trivial τ conforma un lazo trivial (que denotaremos por τ^2) el cual se levanta a un lazo* **impar** *$\widetilde{\tau\tau} \subset S^2$. O sea, $\Pi \circ \widetilde{\tau\tau} = \tau^2$, y $\widetilde{\tau\tau}$ es invariante bajo la aplicación antipodal de S^2.*

Más explícitamente, cuando $\tau : [0, L] \to \mathbb{RP}^2$ es un lazo, $\tau^2 : [0, 2L] \to \mathbb{RP}^2$ denota el lazo definido por

$$\tau^2(t + L) \;:=\; \tau(t) \qquad \text{siempre que } 0 \leq t \leq L\,,$$

y el hecho que $\widetilde{\tau\tau}$ es *impar* significa que

$$\widetilde{\tau\tau}(t+L) \;=\; -\widetilde{\tau\tau}(t) \qquad \text{cuando } 0 \le t \le L\,.$$

4.2 Curvatura geodésica en $\mathbb{RP}^2$. Como en S^2, la curvatura geodésica llevará un papel muy importante en el analisis de tantrices en $\mathbb{RP}^2$. No obstante, debido a la falta de orientación global en $\mathbb{RP}^2$, una dificultad surge: No se puede definir de manera canónica el vector normal unitario ν a lo largo de una curva. Consecuentemente, la ecuación (2.10) que usamos para definir κ_g en S^2,

$$\kappa_g \;:=\; \ddot{\tau}\cdot\nu$$

es ambigua. Cualquier arco *abierto* en $\mathbb{RP}^2$ (por ejemplo, cualquier lazo menos un solo punto) posede dos campos normales unitarios y continuos — uno el opuesto del otro, pero a diferencia de S^2, $\mathbb{RP}^2$ no "prefiere" uno de ellos. Sin embargo, *por escoger un tal campo como ν, la definición de κ_g arriba sí nos da una función a lo cúal podemos llamar la* **curvatura geodésica** *del arco.*

Obviamente, el signo de esta función κ_g en un punto no nos dice nada; lo podemos cambiar simplemente por escoger el normal opuesto. En particular, la integral de κ_g sobre un arco abierto solamente está definida módulo un signo. Quitaremos esta ambigüedad, pues, definiendo *la* **curvatura geodésica total** *de un arco γ abierto en $\mathbb{RP}^2$* por el *valor absoluto* de la integral:

$$\operatorname{ctg}(\gamma) \;:=\; \Big|\int_\gamma \kappa_g\, ds\Big| \qquad \text{en } \mathbb{RP}^2$$

Afortunadamente, *la oscilación* $\operatorname{osc}\phi$ que definimos en §3.5, claramente sigue teniendo sentido para lazos en $\mathbb{RP}^2$, justo como antes; aún para lazos no-triviales, podemos calcular la curvatura geodésica total de cada sub-arco abierto.

De hecho, puesto que podemos definir un campo normal continuo en un lazo τ *trivial* en $\mathbb{RP}^2$, podemos definir $\operatorname{ctg}(\tau)$ en tales lazos también. Pero note bien: *en un lazo τ* no-*trivial*, $\operatorname{ctg}(\tau)$ *no se puede definir bien!* Claro que por quitar un punto p de tal lazo, obtendremos un arco abierto, y $\operatorname{ctg}(\tau - \{p\})$ sí estará bien definida. Pero el lector puede verificar que este numero dependerá en el punto p que se quita.*

En consecuencia, para estudiar un lazo τ no-trivial en $\mathbb{RP}^2$, levantaremos su doble, τ^2 a S^2, obteniendo allá un lazo $\widetilde{\tau\tau}$ *impar*. Necesitaremos pues el siguiente lema referente a curvas impares en S^2.

4.3 Lema. *La curvatura geodésica k_g de una curva impar en S^2 es también impar. O sea, si p pertenece a tal curva, entonces $-p$ también le pertenece, y*

$$k_g(-p) \;=\; -k_g(p)\,.$$

*Por otro lado, al lector tal vez le gustará mostrar el siguiente hecho interesante: $\sup\{\operatorname{ctg}(\tau - \{p\}) : p \in \tau\} = \operatorname{osc}\phi_\tau$

Demostración. Suponga que $\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to S^2$ parametriza un pedazo de tal curva cerca de $p = \gamma(0)$. Entonces $-\gamma$ la parametriza cerca de $-p$. El resultado ahora se sigue directamente de la definición (2.10): $\kappa_g := \ddot{\gamma}\cdot\nu$. Explicitamente, en $-p$, la aceleración de la curva viene dado por $(-\gamma)''(0) = -\ddot{\gamma}(0)$, mientras que $\nu(-p) := (-\gamma)(0)\times(-\gamma)'(0) = \gamma(0)\times\dot{\gamma}(0) = \nu(p)$. Tenemos pues $\kappa_g(-p) = (-\ddot{\gamma}(0))\cdot\nu(p) = -\kappa_g(p)$, como queríamos. □

Por fin, podemos pasar al analisis de tantrices en $\mathbb{RP}^2$. Empezemos con la observación de que la proyección canónica $\Pi : S^2 \to \mathbb{RP}^2$ "conserva tantrices":

4.4 Proposición (Π conserva tantrices). *Sean $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\tau}$ curvas inmersas en S^2. Sean $\sigma := \Pi\circ\tilde{\sigma}$, y $\tau := \Pi\circ\tilde{\tau}$ sus imagenes en $\mathbb{RP}^2$. Entonces τ será la tantriz de σ en $\mathbb{RP}^2$ sii $\pm\tilde{\tau}$ es la tantriz de $\tilde{\sigma}$ en S^2.*

Demostración. La tantriz de $\sigma = \Pi\circ\tilde{\sigma}$ en $\mathbb{RP}^2$ es, por la Definición 1.3, *el conjunto de puntos duales a líneas normales a σ*. Para aplicar esta definición, recordemos primero que un punto $p \in S^2$ y su imagen $\Pi(p) \in \mathbb{RP}^2$ representan una línea en $\mathbb{R}^3$ — la misma línea, con o sin orientación respectivamente. Una línea $\gamma \in S^2$, por otro lado (es decir, un círculo máximo), y su imagen $\Pi(\gamma) \in \mathbb{RP}^2$, representan un *conjunto* de líneas (orientadas o no, respectivamente): las que pasan por el origen en algún plano de $\mathbb{R}^3$. Con esto en mente, es fácil verificar que la proyección $\Pi : S^2 \to \mathbb{RP}^2$ tiene las tres siguientes propiedades:

- *Líneas en S^2 (i.e., círculos máximos) corresponden por Π a líneas en $\mathbb{RP}^2$.*

O sea, si $\gamma \subset S^2$ es un círculo máximo, entonces $\Pi(\gamma)$ es una línea en $\mathbb{RP}^2$, y vice-versa: Si $\lambda \subset \mathbb{RP}^2$ es una línea. $\Pi^{-1}(\lambda) \subset S^2$ conforma un círculo máximo.

El hecho de que Π es una isometría local implica de inmediato la segunda propiedad:

- Π *conserva ángulos — y en particular, ortogonalidad — entre arcos que se intersectan.*

Finalmente, puesto que un punto en $\mathbb{RP}^2$ es dual a una línea si y solo si la línea y el plano a que corresponden en $\mathbb{R}^3$ son ortogonales, tenemos que

- Π *conserva la relación de dualidad entre un punto y una línea, módulo signo.*

Más precisamente, tenemos que cuando $p \in S^2$ es dual a un círculo máximo orientado $\gamma \subset S^2$, entonces $\Pi(p)$ será dual a $\Pi(\gamma)$ en $\mathbb{RP}^2$. El converso, por otro lado, se obtiene módulo signo, lo cual produce la ambigüedad de signo en la frase final de la Proposición: Si $p \in \mathbb{RP}^2$ es dual a una línea $\lambda \subset \mathbb{RP}^2$, entonces $\Pi^{-1}(p)$ contendrá *dos* puntos antipodales, $\pm q$, en S^2, solamente uno de los cuales será dual al círculo máximo $\Pi^{-1}(\lambda) \subset S^2$, dependiendo de la orientación que demos a este círculo.

Vemos pues que Π respeta líneas, ortogonalidad, y dualidad — precisamente los conceptos que caracterizan tantrices. La demostración se sigue ahora de estos hechos; dejamos los detalles al lector. □

La proposición anterior puede sugerir que no encontraremos nada en $\mathbb{RP}^2$ que no hayamos visto ya en S^2 — pero no es así. El caso (ii) del teorema siguiente nos mostrará que los lazos no-triviales en $\mathbb{RP}^2$ presentan un fenómeno no previsto:

4.5 Teorema. *Un lazo τ inmerso en $\mathbb{RP}^2$ será la tantriz de otro lazo en $\mathbb{RP}^2$ sii*

(i) *τ es homotopicamente* **trivial**, $\operatorname{osc}\phi_\tau < \pi$, *y* $\operatorname{ctg}(\tau) = 0$, *o*
(ii) *τ es homotopicamente* **no-trivial** *y* $\operatorname{osc}\phi_\tau < \pi$.

Lo soprendente aquí es que la condición $\operatorname{osc}\phi_\tau < \pi$ basta en el caso *no*-trivial; a diferencia del caso trivial, no se necesita ninguna otra hipótesis.

Demostración. El caso (i) se sigue de inmediato de la Proposición 4.4, y del hecho de que todo lazo trivial en $\mathbb{RP}^2$ se levanta a un *lazo* en S^2, como se discutió en §4.1. Nuestra teoría de tantrices de lazos en S^2 implica entonces este caso.

Nos toca pues estudiar el caso (ii). Por el resto de la demostración, entonces, $\tau : [0, L] \to \mathbb{RP}^2$ denotará un lazo no-trivial, inmerso, y sin perdida de generalidad, con rapidez 1.

Es fácil establecer la *necesidad* de la condición $\operatorname{osc}\phi_\tau < \pi$ en caso (ii) del Teorema. Suponga que τ conforma la tantriz de algún otro lazo σ inmerso en $\mathbb{RP}^2$. Entonces τ^2 (τ recorrido dos veces) obviamente conforma la tantriz de σ^2, y ambos son triviales. Podemos pues levantar τ^2 y a curvas $\widetilde{\tau\tau}$ y $\widetilde{\sigma\sigma}$ en S^2, las cuales serán lazos inmersos: *lazos* por la trivialidad de τ^2 y σ^2, e *inmersos* porque τ^2 y σ^2 están inmersos, y Π es una isometría local. Más aún, la Proposición 4.4 nos dice que $\pm\widetilde{\tau\tau}$ será la tantriz de $\widetilde{\sigma\sigma}$, así pues nuestra conocimiento de tantrices en S^2 (Teorema 3.7) implica que $\operatorname{osc}\phi_{\widetilde{\tau\tau}} < \pi$. Puesto que todo sub-arco de τ es la imagen, por Π, de un sub-arco de $\widetilde{\tau\tau}$, se sigue de inmediato que $\operatorname{osc}\phi_\tau < \pi$, y tenemos así la *necesidad* de esta condición, como queríamos.

Nos toca luego mostrar la *suficiencia* de la misma condición: que si $\operatorname{osc}\phi_\tau < \pi$, τ da la tantriz de algún otro lazo σ en $\mathbb{RP}^2$. Para ver esto, levantamos de nuevo el doble lazo $\tau^2 : [0, 2L] \to \mathbb{RP}^2$ a un lazo $\widetilde{\tau\tau}$ en S^2. Como discutimos al final de §4.1, $\widetilde{\tau\tau}$ será *impar* en S^2 — tendremos $\widetilde{\tau\tau} = -\widetilde{\tau\tau}$. Lo que queremos deducir de esto es, que $\widetilde{\tau\tau}$ *conforma la tantriz de otro lazo* $\widetilde{\sigma\sigma}$ **impar** *en* S^2. En tal caso, $\widetilde{\sigma\sigma}$ se proyectará (por Π) a un lazo $\sigma^2 \subset \mathbb{RP}^2$ que deberá ser dos veces un lazo $\sigma \subset \mathbb{RP}^2$. Tendremos pues por la Proposición 4.4 que τ^2 es la tantriz de σ^2 en $\mathbb{RP}^2$, y esto claramente implica que τ será la tantriz de σ. Así obtendremos la suficiencia que queríamos.

En otras palabras, nos queda ahora deducir que $\widetilde{\tau\tau}$ es la tantriz de un lazo **impar** en S^2. El Lema 4.3 da el clave: *que la curvatura geodésica κ_g de $\widetilde{\tau\tau}$ es impar.* En primer lugar, este hecho implica que $\widetilde{\tau\tau}$ sí es una tantriz, porque establece las dos hipótesis del Teorema 3.7 sobre tantrices en S^2. Establece

que $\operatorname{osc}\phi_{\widetilde{\tau\tau}} < \pi$, porque si escribimos $\int_a^b$ para $\int_{\widetilde{\tau\tau}([a,b])}$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_a^b \kappa_g\, ds &= \left(\int_a^{b-L} + \int_{b-L}^{a+L} + \int_{a+L}^{b}\right) \kappa_g(s)\, ds \\ &= \left(\int_a^{b-L} + \int_{b-L}^{a+L}\right) \kappa_g(s)\, ds \;+\; \int_a^{b-L} \kappa_g(s+L)\, ds \\ &= \left(\int_a^{b-L} + \int_{b-L}^{a+L} - \int_a^{b-L}\right) \kappa_g(s)\, ds \\ &= \int_{b-L}^{a+L} \kappa_g(s)\, ds\end{aligned}$$

Puesto que o $\widetilde{\tau\tau}([a, b])$ o $\widetilde{\tau\tau}([b-L, a+L])$ tiene longitud menor o igual que L, y por tanto se proyecta isometricamente a un sub-arco de $\tau \subset \mathbb{RP}^2$ por Π, así nuestra hipótesis $\operatorname{osc}\phi_\tau < \pi$ implica también que $\operatorname{osc}\phi_{\widetilde{\tau\tau}} < \pi$.

Aún más fácil, la imparidad de κ_g en $\widetilde{\tau\tau}$ implica que $\operatorname{ctg}(\widetilde{\tau\tau}) = 0$:

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{\tau\tau}} \kappa_g\, ds &= \int_0^L \kappa_g(s)\, ds \;+\; \int_L^{2L} \kappa_g(s)\, ds \\ &= \int_0^L \kappa_g(s)\, ds \;+\; \int_0^L k_g(s+L)\, ds \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Resulta pues por el Teorema 3.7 que $\widetilde{\tau\tau}$ será la tantriz de un lazo en S^2 — y de hecho de un intervalo abierto de tales lazos, según el Comentario 3.8. Nos queda entonces mostrar que alguno de ellos es *impar*.

Para hacer eso, consideremos la única antiderivada ϕ^* de κ_g tal que su promedio $\int_{\widetilde{\tau\tau}} \phi^* ds$ se anula. Esto lo podemos lograr sustrayendo cierta constante de cualquier antiderivada ϕ (existen tales antiderivadas de κ_g porque $\operatorname{ctg}(\widetilde{\tau\tau}) = 0$). La antiderivada ϕ^* será entonces una función *impar* en $\widetilde{\tau\tau}$ (como κ_g) porque primero,

$$\frac{d}{ds}\Big(\phi^*(s) + \phi^*(s+L)\Big) \;=\; \kappa_g(s) + \kappa_g(s+L) \;=\; 0$$

así que $\phi^*(s) + \phi^*(s+L) \equiv c$, una *constante*. Como el promedio de ϕ^* se anula, podemos concluir que c también se anula, porque

$$c \;=\; \frac{1}{L}\int_0^L c\, ds \;=\; \frac{1}{L}\int_0^L \phi^*(s) + \phi^*(s+L)\; ds \;=\; \frac{1}{L}\int_0^{2L} \phi^*(s)\, ds \;=\; \frac{1}{L}\cdot 0$$

Luego, note que la imparidad de ϕ^* implica $\inf \phi^* = -\sup \phi^*$. Ya que $\sup \phi^* - \inf \phi^* = \operatorname{osc} \phi^* = \operatorname{osc} \phi_{\widetilde{\tau\tau}} < \pi$, deducimos pues

$$|\sup \phi^*|, |\inf \phi^*| < \frac{\pi}{2} . \tag{4.6}$$

Para completar la demostración; "invertiremos" $\widetilde{\tau\tau}$ con la siguiente curva $\widetilde{\sigma\sigma} \subset S^2$:

$$\widetilde{\sigma\sigma}(t) := -\cos\phi^*(t)\,(\widetilde{\tau\tau})'(t) + \sin\phi^*(t)\,\nu_{\widetilde{\tau\tau}}(t) .$$

Aquí $\nu_{\widetilde{\tau\tau}}(t) := \widetilde{\tau\tau}(t) \times (\widetilde{\tau\tau})'(t)$ es el vector normal canónico en $\widetilde{\tau\tau}(t)$. Puesto que ϕ^*, $\widetilde{\tau\tau}$ y $\nu_{\widetilde{\tau\tau}}$ son períodicos con período $2L$, vemos de inmediato que $\widetilde{\sigma\sigma}$ es un *lazo* en S^2. Combinando el estimativo (4.6) con la Observación 3.4, vemos que $\widetilde{\sigma\sigma}$ está también *inmerso* en S^2. Y, desde que $\dot{\phi}^* = \kappa_g$ a lo largo de $\widetilde{\tau\tau}$, la Observación 3.1 nos dice que $\widetilde{\sigma\sigma}$ representa un campo *paralelo* alrededor de $\widetilde{\tau\tau}$, así que la tantriz de $\widetilde{\sigma\sigma}$ en S^2 será $\widetilde{\tau\tau}$. Finalmente, puesto que las funciones *sen*, ϕ^*, $\widetilde{\tau\tau}$, y por tanto, $(\widetilde{\tau\tau})'$, son impares, mientras $\nu_{\widetilde{\tau\tau}}$ (el producto cruz de dos funciones impares) y la función *cos* son pares, el lector confirmará sin problema ahora que $\widetilde{\sigma\sigma}$ es un lazo *impar* con tantriz igual a $\widetilde{\tau\tau}$. Como discutimos arriba, esto implica el resultado: *$\widetilde{\sigma\sigma}$ se proyecta (2 a 1) a un lazo σ con tantriz igual a τ.* □

4.7 Comentarios finales. Note que, sin otra hipótesis, "$\operatorname{osc} \phi_\tau < \pi$" es una condición *abierta*. El Teorema pues implica que *una tantriz* no-*trivial sigue siendo una tantriz cuando la perturbamos un poco.* No se tiene eso en S^2, ni en el caso trivial en $\mathbb{RP}^2$, porque la hipótesis $\operatorname{ctg}(\tau) = 0$ generalmente no se conserva bajo perturbaciones.

Por otro lado, tenemos *unicidad* del "inverso" de una tantriz no-trivial en $\mathbb{RP}^2$. O sea, cuando τ es un lazo no-trivial, y $\operatorname{osc} \phi_\tau < \pi$, habrá uno, y solamente un, lazo $\sigma \subset \mathbb{RP}^2$ que tiene τ como su tantriz. Eso se puede ver por la demostración arriba: Si reemplazamos ϕ^* allá con cualquier otra antiderivada $\phi^* + C$ destruimos la imparidad de $\widetilde{\sigma\sigma}$. Por ejemplo, el lector tal vez le gustaría mirar que pasa si tratamos de proyectar el Ejemplo 2.6 a $\mathbb{RP}^2$: un medio del ecuador se proyecta a una línea (una curva cerrada) en $\mathbb{RP}^2$, pero un semicírculo paralelo al ecuador (con radio $r < 1$) *no* se proyecta a una curva cerrada. Compare también esta situación con la que discute el Comentario 3.8 en referencia a S^2.

Agradecimiento. Por último, quisiera agradecer a los organizadores de la III Escuela de Verano, y en particular a los profesores José Escobar y Jaime Lesmes, por la invitación. Agradezco también a Oscar Mario Perdomo y a Sonia Ramírez por las correcciones del español de este artículo.

Referencias

[Ch] S-S. Chern, *Curves and Surfaces in Euclidean Space*, in "Studies in Global Geometry and Analysis" (S-S. Chern, ed.), vol. 4, Math. Assoc. Amer., Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1967, pp. 16–56.

[CW] S-S. Chern and J. G. Wolfson, *Minimal surfaces by moving frames*, Amer. J. Math. **105** no. 1 (1983), 59–83.

[DoC] M. P. DoCarmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1976.

[GP] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1974.

[S] B. Solomon, *Tantrices of Spherical Curves*, MAA Monthly **103** no. 1 (January 1996), 32–41.

[Sp] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Volume III*, Publish or Perish, Boston, MA, 1975.

[W] J. L. Weiner, *Flat tori in S^3 and their Gauss maps*, Proc. London Math. Soc. (3) **62** no. 1 (1991), 54–76.

BRUCE SOLOMON
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INDIANA UNIVERSITY
BLOOMINGTON, IN 47405-5701
USA
e-mail: solomon@ucs.indiana.edu

Memorias III Escuela de Verano
Geometría Diferencial
Ecuaciones Diferenciales Parciales
y Análisis Numérico
Universidad de los Andes, 20 a 30 de junio de 1995
páginas 45–51

Ecuaciones diferenciales elípticas semilineales

ALFONSO CASTRO [1]

University of North Texas, USA

ABSTRACT. We discuss the existence of solutions to boundary value problems. We emphazise the bifurcation aspects of the set of solutions.

RESUMEN. Se presentan resultados sobre la existencia de soluciones para problemas de frontera elípticos. Se enfatiza el punto de vista de la bifurcación.

El prototipo de un problema semilineal elíptico es la ecuación

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda f(u) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

donde Ω es una región acotada en R^N cuya frontera es una variedad suave, Δ es el operador de Laplace, $\lambda > 0$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 tal que $f(0) = 0$.

Un caso muy sencillo es cuando $f(u) = u$, el caso lineal. Este es conocido como problema de valores propios. En este caso resulta que el conjunto de soluciones de (1) consiste de $\{(\lambda, 0); \lambda > 0\}$ junto con *los valores propios y los vectores propios* de $-\Delta$. Los valores propios, valores de λ para los cuales (1) tiene soluciones distinta de $u = 0$ (funciones propias), forman una sucesión

[1] Esta investigación ha sido apoyada parcialmente por COLCIENCIAS (contrato No. 168-93).

$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \ldots$ que tiende a infinito. Es decir que podemos visualizar dicho conjunto através de la figura 1.

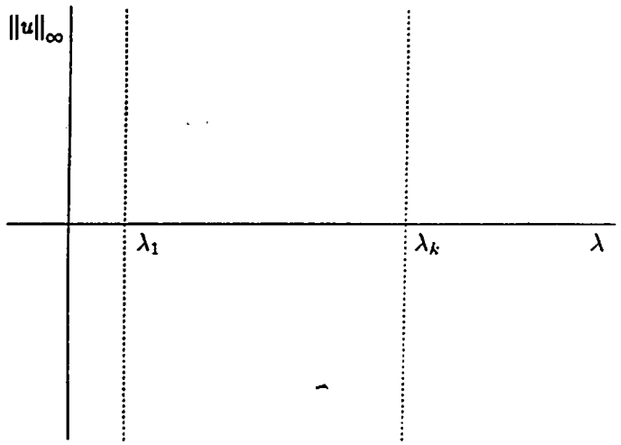

FIGURA 1

Cuando el caso es unidimensional, es decir cuando Ω es un intervalo, digamos el intervalo $[0,1]$ el conjunto de soluciones de (1) puede ser determinado si se saben algunas propiedades más de f. Por el ejemplo si $f'(0) = 1$, f es creciente y f es *superlineal*, es decir si

$$\lim_{|u|\to\infty} f'(u) = +\infty \tag{2}$$

entonces el conjunto de soluciones correponde a la figura 2.

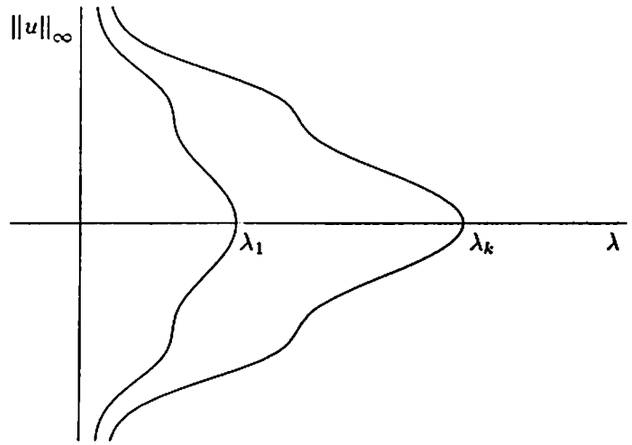

FIGURA 2

Por ejemplo de ésta figura se concluye que si f es superlineal entonces para cada $\lambda > 0$ el problema (1) tiene infinitas soluciones. Más aún, si

$$\lim_{|u|\to\infty} f'(u) = f'(\infty) \tag{3}$$

entonces las soluciones corresponden a la figura 3. De esta última figura, por ejemplo, se puede concluir que si

$$f'(0) < \lambda_k < \lambda_j < f'(\infty),$$

entonces la ecuación (1) tiene por lo menos $2(j-k)+1$ soluciones. Las figuras 2 y 3 persisten aún cuando Ω es una bola en $\mathbb{R}^N$ y se consideran solamente las soluciones radiales, solo que además es preciso suponer que f crece de manera subcrítica. Es decir, es preciso suponer que existen constantes $A > 0$ y $p \in \left[1, \frac{N+2}{N-2}\right)$ tales que

$$|f(u)| \leq A(|u|^p + 1). \tag{4}$$

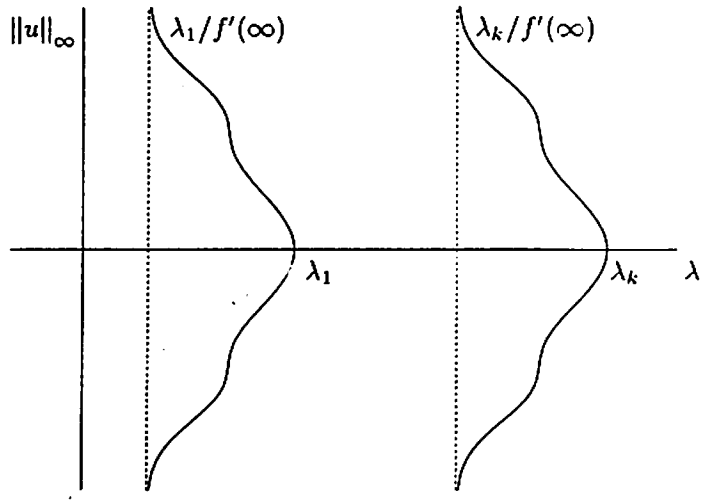

FIGURA3

Sin embargo si $f(u) = |u|^{4/(N-2)}u$, $(N \geq 3)$ y Ω es una región en forma de estrella, por ejemplo una bola, entonces para cada λ la única solución de (1) es $u = 0$. Este interesante fenómeno, descubierto por el matemático soviético S. I. Pohozaev (véase [11]), motiva muchas preguntas que a las que se las ha dedicado una buena cantidad de esfuerzo en los últimos veinte años. En [7] y [12] se demostró que cuando $\lambda f(u)$ es reemplazado por $\lambda u + |u|^{4/(N-2)}u$ entonces el conjunto de soluciones de (1) también corresponde a la figura 2 si $N \geq 7$. Quedó entonces la pregunta: ¿Qué pasa si $N \in \{3,4,5,6\}$? Aunque sería fácil conjeturar que la respuesta debería ser lo mismo que para $N \geq 7$, F. Atkinson, H. Brézis and L. Peletier (véase [1]) demostraron que este no es el caso, y más aún que $N = 3$ se comporta de manera diferente a $N = 4,5,6$. En efecto se demostró que para $N = 4,5,6$ se tiene la gráfica continua de la figura 4 mientras que para $N = 3$ se tiene la gráfica punteada de la misma figura.

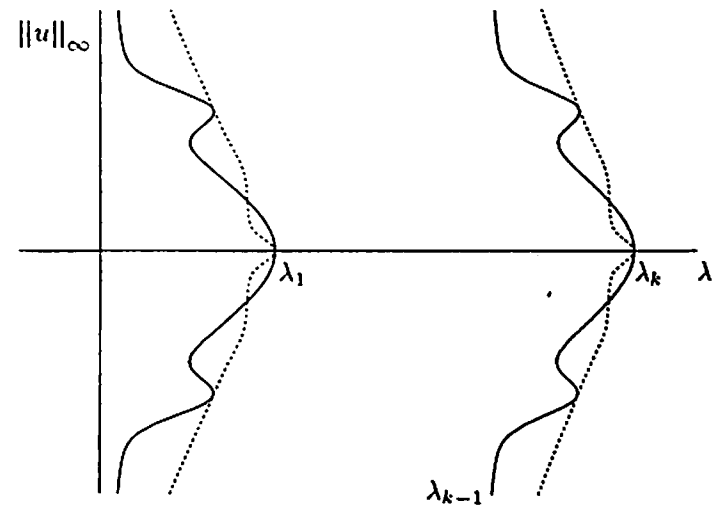

FIGURA 4

Ya que los argumentos de [1] sólo usan el análisis de las soluciones pequeñas y el de las soluciones muy grandes, quedó la pregunta de si para $3 \leq N \leq 6$ la ecuación (1) tiene un número finito de soluciones. Vale la pena anotar que para el mismo problema, cuando $\frac{4}{N-2}$ es reemplazado por un número mayor, entonces hay valores de λ para los que el problema (1) tiene infinitas soluciones radiales (véase [2]). Sin embargo en [4] se demostró que para $N = 3,4$ para cada λ hay solo un número finito de soluciones radiales. En [5], [6] además se demostró que para $N = 5,6$ y λ fijo hay una única solución grande. Queda entonces el problema abierto de si para $N = 5,6$ hay sólo un número finito de soluciones. De hecho para el caso de las soluciones que cambian de signo hoy por hoy se tiene muy poca información.

Hasta ahora nuestra discusión se ha restringido al caso radialmente simétrico. Cuando $N > 1$ y la región no es una bola, o un anillo, se tienen aún muchas incógnitas. Se sabe que cerca de los puntos de la forma $(\lambda_k/f'(0),0)$ hay soluciones no triviales (puntos de bifurcación local). Sin embargo, la forma exacta y la propagación de tales conjuntos de soluciones es desconocido. Sabemos sí

que las soluciones que se acumulan en $(\lambda_1/f'(0), 0)$ forman un continuo no acotado que no se acumula en ningún otro punto de bifurcación local (véase figura 5). Sin embargo, los contraejemplos de Dancer [10] sugieren que hay continuos de bifurcación que unen puntos de bifurcación local.

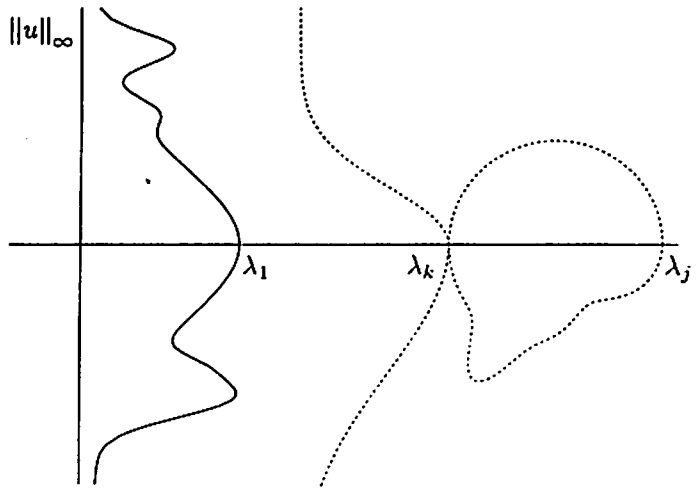

FIGURA 5

Los continuos de soluciones que provienen de $(\lambda_k/f'(0), 0)$, $k \geq 2$ corresponden a soluciones que cambian de signo. Entender bien estos últimos continuos es entonces equivalente a entender las soluciones de (1) que cambian de signo. A este respecto, por ejemplo, se plantea la siguiente problemática. Con hipótesis adicionales, si f es superlineal entonces (1) tiene una solución que cambia de signo si $\lambda f'(0) < \lambda_1$ (véase [3]). Aunque creemos que estas soluciones deben ser parte del continuo que se bifurca $(\lambda_2/f'(0), 0)$, esto no se ha demostrado a la fecha. Responder esta pregunta seguramente ayudará a demostrar que en realidad, en el caso superlineal, el problema (1) debe tener dos soluciones que cambian de signo exactamente una vez.

Referencias

[1] F. Atkinson, H. Brézis & L. Peletier, *Solutions d'équations elliptiques avec exposant de Sobolev critique que changent de signe*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math **306** (1988), 711–714.

[2] C. Budd and J. Norbury, *Semilinear Elliptic Equations and Supercritical Growth*, J. Differential Equations **68** no. 2 (1987), 169–197.

[3] A. Castro, J. Cossio and J. M. Neuberger, *A Sign-Changing Solution for a Superlinear Dirichlet Problem* Rocky Mountain J. Math., (to appear).

[4] A. Castro and A. Kurepa, *Infinitely many radially symmetric solutions to a superlinear Dirichlet problem in a ball*, Proc. Amer. Math. Soc. **101** no. 1 (1987), 57–64.

[5] ———, *Radially symmetric solutions to a superlinear Dirichlet problem with jumping nonlinearities in a ball*, Trans. Amer. Math. Soc. **315** no. 1 (1989), 353–372.

[6] ———, *Radially symmetric solutions to a Dirichlet problem involving critical exponents*, Trans. Amer. Math. Soc. **343** no. 2(1994), 907–926.

[7] G. Cerami, S. Solimini, M. Struwe, *Some existence results for superlinear elliptic boundary value problems involving critical exponents*, J. Funct. Anal. **69** no. 3 (1986), 289–306.

[8] S. N. Chow and J. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, vol. 251, Springer-Verlag, 1982.

[9] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz, *Bifurcation from simple eigenvalues* , J. Funct. Anal. **8** (1971), 321–340.

[10] E. N. Dancer, *A counter example to the Lazer-McKenna conjecture*, Nonlinear Anal. **13** no. 1 (1989), 19–21.

[11] S. I. Pohozaev, *Eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, (translated from Dokl. Akad. Nauk. SSSR **165** (1965) 36–39), Soviet Math. Dokl. **6** (1965), 1408–1411.

[12] S. Solimini, *On the existence of infinitely many radial solutions for some elliptic problems*, Rev. Mat. Apl. **9** no. 1 (1987), 75–86.

ALFONSO CASTRO
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF NORTH TEXAS
DENTON, TX 76203-5116
USA
e-mail: acastro@unt.edu

Memorias III Escuela de Verano
Geometría Diferencial
Ecuaciones Diferenciales Parciales
y Análisis Numérico
Universidad de los Andes, 20 a 30 de junio de 1995
páginas 53–59

Múltiples soluciones para un problema elíptico semilineal

JORGE COSSIO[1]

Universidad Nacional, Colombia

ABSTRACT. We prove that a semilinear elliptic boundary value problem has at least four solutions when the range of the derivative of the nonlinearity includes at least the first two eigenvalues. Extensive use is made of the global bifurcation theorem, bifurcation from infinity, and bifurcation from simple eigenvalues.

RESUMEN. Se demuestra que un problema elíptico semilineal con condición de frontera de Dirichlet tiene al menos cuatro soluciones cuando el rango de la derivada de la no linealidad incluye al menos los dos primeros valores propios. En la demostración se usan, de manera esencial, los teoremas de bifurcación global, de bifurcación en el infinito y de bifurcación en un valor propio simple.

§1 Introducción

En este artículo se estudia la existencia de múltiples soluciones para el problema elíptico semilineal

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

[1] Esta investigación ha sido apoyada parcialmente por COLCIENCIAS (contrato No. 168-93)

donde Ω es una región acotada en $\mathbb{R}^n$ cuya frontera es una variedad suave, Δ es el operador de Laplace y $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 tal que $f(0) = 0$, $x\,f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ y

$$f'(\infty) := \lim_{|u|\to\infty} \frac{f(u)}{u} \in \mathbb{R}.$$

La existencia de soluciones al problema (1) ha sido ampliamente estudiada por muchos autores (ver [1], [2], [3], [4], [5], [6], [9], [10], [11]). A. Castro y J. Cossio en [3] estudian la existencia de soluciones en el caso radialmente simétrico cuando el rango de la derivada de la no linealidad incluye al menos los primeros j valores propios y Ω es la bola unitaria en $\mathbb{R}^N$; allí se emplean técnicas de teoría de bifurcación y se utiliza el hecho de que la ecuación (1) en el caso radialmente simétrico se reduce a una ecuación diferencial ordinaria. Los mismos autores estudian el problema (1) en [4], cuando Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, el rango de la derivada de la no linealidad incluye al menos los dos primeros valores propios y la derivada de la no linealidad está acotada; allí se utilizan técnicas variacionales y teoría de grado para demostrar la existencia de soluciones. Sea $\lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_3 \le \cdots \le \lambda_k \le \ldots$ la sucesión de valores propios de $(-\Delta)$ con condición de frontera de Dirichlet. El objetivo principal de este artículo es demostrar el siguiente teorema.

Teorema. *Si $0 < f'(0) < \lambda_1$, $\lambda_2 < f'(\infty)$, λ_2 es un valor propio de multiplicidad impar y $f'(\infty) < \lambda_j$ (donde λ_j es el siguiente valor propio distinto de λ_2) entonces el problema (1) tiene al menos cuatro soluciones.*

A diferencia del teorema principal de [4], el teorema anterior no depende del acotamiento global de la derivada de la no linealidad. El teorema se demuestra utilizando solamente técnicas de teoría de bifurcación; en la prueba se hace uso intensivo del teorema de bifurcación global (ver [12]), del teorema de bifurcación en el infinito (ver [12]) y del teorema de bifurcación de un valor propio simple (ver [7]).

§2 Demostración del teorema

Presentamos a continuación las ideas centrales de la demostración del teorema. Los detalles de la prueba se encuentran en [8]. Consideremos el problema más general

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda f(u) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Sea E el espacio de Banach de funciones en $C^1(\bar{\Omega})$ que satisfacen $u = 0$ en $\partial\Omega$. Sea J la clausura en $\mathbb{R}\times E$ del conjunto de soluciones no triviales del problema (2). Como λ_1 es un valor propio simple de $-\Delta$, $\left(\frac{\lambda_1}{f'(0)}, 0\right)$ y $\left(\frac{\lambda_1}{f'(\infty)}, \infty\right)$ son puntos de bifurcación de (2) (ver [7] y [12]).

Denotemos por Γ_1^+ (respectivamente, Γ_1^-) la componente conexa de soluciones no triviales de (2) que se bifurca de $\left(\frac{\lambda_1}{f'(0)}, 0\right)$ y que contiene elementos de la forma $(\lambda, r\varphi_1 + \psi(r))$ con $r > 0$ (respectivamente, con $r < 0$), donde φ_1 es la función propia correspondiente al primer valor propio λ_1. Denotemos por G_1^+ (respectivamente G_1^-) la componente conexa de soluciones no triviales de (2) que se bifurca de $\left(\frac{\lambda_1}{f'(\infty)}, \infty\right)$ y que contiene elementos de la forma $(\lambda, r\varphi_1 + \psi(r))$ con $r > 0$ (respectivamente, con $r < 0$). Utilizando el principio del máximo de Hopf y el teorema de la vecindad regular, se demuestra el siguiente lema que nos permitirá estudiar las ramas de soluciones del problema (2).

Lema.

(a) *Si $(\lambda, u) \in \Gamma_1^+$ entonces $u > 0$ en Ω y $\frac{\partial u}{\partial \eta} < 0$ en $\partial\Omega$.*

(b) *Si $(\lambda, u) \in \Gamma_1^-$ entonces $u < 0$ en Ω y $\frac{\partial u}{\partial \eta} > 0$ en $\partial\Omega$.*

Como λ_2 es un valor propio de multiplicidad impar, $\left(\frac{\lambda_2}{f'(\infty)}, \infty\right)$ es un punto de bifurcación de (2). Denotemos por G_2^+ la componente conexa de soluciones no triviales de (2) que se bifurca de $\left(\frac{\lambda_2}{f'(\infty)}, \infty\right)$. Para demostrar el teorema, probaremos que los conjuntos Γ_1^+, Γ_1^- y G_2^+ contienen cada uno una solución al problema (1). Estas 3 soluciones junto con la solución trivial nos proporcionan el resultado. Probemos que $\Gamma_1^+ = G_1^+$. En efecto, por el teorema global de bifurcación (ver [12]) Γ_1^+ contiene un punto de la forma $\left(\frac{\mu}{f'(0)}, 0\right)$ donde $\mu \neq \lambda_1$ y μ es un valor propio de $-\Delta$ o Γ_1^+ es no acotada. Supongamos que Γ_1^+ contiene un punto de la forma $\left(\frac{\mu}{f'(0)}, 0\right)$ donde $\mu \neq \lambda_1$ y μ es un valor propio de $-\Delta$. Usando argumentos de Lyapunov-Schmidt se demuestra que si $(\lambda, u) \in \Gamma_1^+$ y (λ, u) pertenece a una vecindad de $\left(\frac{\mu}{f'(0)}, 0\right)$ suficientemente pequeña, entonces u es una función oscilatoria en Ω, lo cual es una contradicción, ya que por el lema anterior $u > 0$ en Ω siempre que $(\lambda, u) \in \Gamma_1^+$. Luego Γ_1^+ es no acotada en $\mathbb{R} \times E$. Sea $\{(\lambda_n, u_n)\}$ una sucesión en Γ_1^+ tal que $\|(\lambda_n, u_n)\|_{\mathbb{R}\times E} \to \infty$. No es difícil demostrar que el conjunto $\{\lambda_n\}$ es acotado en $\mathbb{R}$, más precisamente,

$$0 < \lambda_n \le \frac{\lambda_1}{a} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ donde } a \text{ es una constante positiva.}$$

Tenemos entonces una sucesión $\{(\lambda_n, u_n)\}$ de soluciones del problema (2) tal que $\sup \lambda_n < \infty$ y $\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \infty$. Sea $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. Por el Teorema de Arzelá-Ascoli podemos encontrar una subsucesión $\{(\lambda_n, v_n)\}$ tal que $\lambda_n \to \lambda$ y $v_n \to v$. Como (λ_n, u_n) es una solución de (2) entonces

$$\Delta u_n + \lambda_n f(u_n) = 0 \qquad \text{en } \Omega.$$

Si hacemos $u = \frac{w}{\|w\|^2}$ entonces $(1, u) \in G_2^+$. De donde se concluye que G_2^+ contiene otra solución al problema (1). Lo cual concluye la demostración del teorema. □

Nota. En la prueba del teorema anterior se obtiene una descripción de los dos posibles diagramas de bifurcación del problema (2), los cuales se muestran en las figuras 1 y 2.

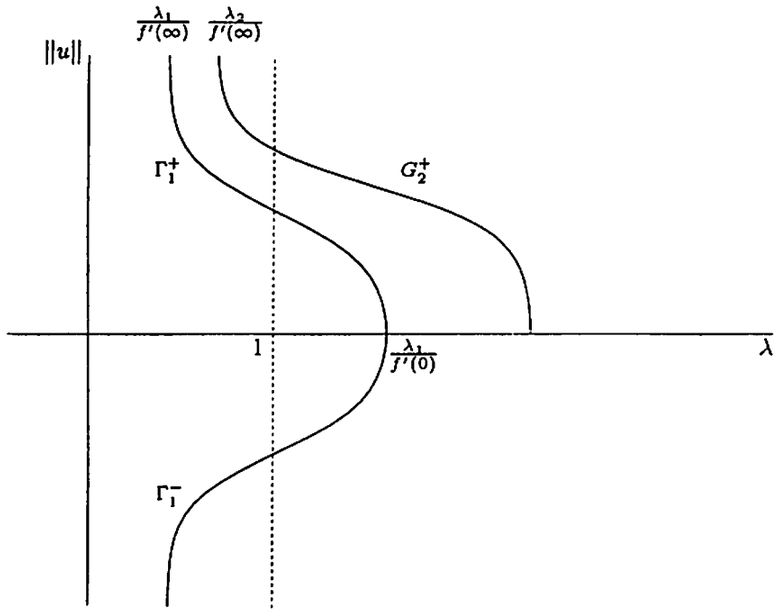

FIGURA 2: DIAGRAMA DE BIFURCACIÓN PARA EL PROBLEMA (2).

Referencias

[1] A. Ambrosetti and G. Mancini, *Sharp nonuniqueness results for some nonlinear problems*, Nonlinear Anal. **3** no. 5 (1979), 635–645.

[2] H. Berestycki, P. L. Lions, and L. A. Peletier, *An ODE approach to the existence of positive solutions for semilinear problems in* $\mathbb{R}^N$, Indiana Univ. Math. J. **30** no. 1 (1981), 141–157.

[3] A. Castro and J. Cossio, *Multiple radial solutions for a semilinear Dirichlet problem in a ball*, (Procceedings of the Second Latin American Colloquium on Analysis, Santafé de Bogotá, 1992), Rev. Colombiana Mat. **27** no. 1–2 (1993), 15–24.

[4] ———, *Multiple solutions for a nonlinear Dirichlet problem*, SIAM J. Math. Anal. **25** no. 6 (1994), 1554–1561.

[5] A. Castro and A. Lazer, *Critical point theory and the number of solutions of a nonlinear Dirichlet problem*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **120** (1979), 113–137.

[6] K. C. Chang, *Solutions of asymptotically linear operator equations via Morse theory*, Comm. Pure Appl. Math. **34** no. 5 (1981), 693–712.

[7] S. Chow and J. Hale, *Methods of bifurcation theory*, A series of comprehensive studies in Mathematics, vol. 251, Springer-Verlag, New York, 1982.

[8] J. Cossio, *Bifurcación y dependencia continua aplicados a la solución de problemas elípticos semilineales*, Trabajo de promoción a profesor titular, Universidad Nacional de Colombia, 1995.

[9] D. G. Costa and D. G. De Figueiredo, *Radial solutions for a Dirichlet problem in a ball*, J. Differential Equations **60** no. 1 (1985), 80–89.

[10] H. Hofer, *Variational and topological methods in partially ordered Hilbert spaces*, Math. Ann. **261** no. 4 (1982), 493–514.

[11] S. J. Li and J. Q. Liu, *Nontrivial critical points for asymptotically quadratic function*, Report of International Center for Theoretical Physics IC/390, Trieste, Italy, 1986.

[12] P. H. Rabinowitz, *Global aspects of bifurcation*, in "Topological methods in bifurcation theory", Sèm. Math. Sup. **91**, Les presses de l'Université de Montreal, Univ. Montréal, Montréal, Que., 1985, pp. 63–112.

JORGE COSSIO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL
APARTADO AÉREO 3840, MEDELLÍN
COLOMBIA

Memorias III Escuela de Verano
Geometría Diferencial
Ecuaciones Diferenciales Parciales
y Análisis Numérico
Universidad de los Andes, 20 a 30 de junio de 1995
páginas 61–73

Living under the Sobolev barrier

Rafael José Iório, Jr.
Felipe Linares

IMPA, Brazil

Márcia A. G. Scialom

IMECC, Brazil

§1 Introduction

The purpose of this article is to apply some "old" methods to some "new" problems. By "old" we mean methods that were developed and used during the seventies and eighties and that work rather well "under the Sobolev Barrier". A little more precisely, we want to use these methods to solve the Cauchy Problem

$$\begin{aligned} \partial_t u &= F(t,u) \in X \\ u(0) &= \phi \in Y \end{aligned} \tag{1.1}$$

in certain cases of interest which will shortly be described. Here X and Y are Banach Spaces and $F : [0,T_0] \times Y \to X$ is continuous with respect to the relevant topologies (this requirement can be weakened; see for instance [11]). In practice one often takes X and Y to be L^2-based Sobolev Spaces, which we define below for completeness' sake. What we mean by working "under the Sobolev Barrier" is taking s large enough so that one can make sense of the

nonlinearity rather easily using Sobolev's Lemma. For the Korteweg – de Vries equation (KdV)

$$\partial_t u + uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.2}$$

the Sobolev Barrier is $s = 3/2$, for if $s > 3/2$, uu_x is a continuous function of the space variable $x \in \mathbb{R}$.

Before proceeding it is worthwhile explaining what we mean by a solution of (1.1) and define the Sobolev Spaces as promised. We will say that (1.1) is *locally well-posed* if the following conditions are satisfied:

(i) *Existence*: there exist a $T > 0$ and a function $u \in C([0,T], Y)$ satisfying the differential equation in (1.1), with the time derivative computed with respect to the norm of X and such that $u(0) = \phi$. Note that we have included here the persistence property, that is, $u(t) \in Y$ for all t in the interval $[0,T]$. This is a non-trivial requirement: there are counterexamples showing that it may not hold (see for example [7]).

(ii) *Uniqueness*: there is at most one solution to the problem at hand.

(iii) *Continuous dependence*: the map $\phi \to u(t)$ is continuous with respect to the appropriate topologies. More precisely, if $\phi_n \to \phi$ in Y, then for any $T' \in [0,T)$, u_n, the solution corresponding to ϕ_n, can be extended (if necessary) to $[0,T']$ for all n sufficiently large and

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T']} \| u_n(t) - u(t) \|_Y = 0. \tag{1.3}$$

Establishing the continuous dependence is often the most difficult part of the proof of local well-posedness for the Cauchy Problem (1.1) and we will not discuss its details in order to keep this paper reasonably short. It should be noted however, that all the Cauchy Problems considered below share this property and that the proofs can be found in the references mentioned in the text. If any one of the above properties fail, we say that (1.1) is ill-posed.

Let $s \in \mathbb{R}$. The Sobolev Space $H^s(\mathbb{R}^n)$ is the set of all tempered distributions such that $(1 + |\xi|^2)^{s/2} f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ where $\widehat{f}$ denotes the Fourier Transform of f. It is easy to see that they are all Hilbert spaces with respect to the inner product

$$(f \mid g)_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \widehat{f}(\xi)\, \overline{\widehat{g}(\xi)}\, d\xi \tag{1.4}$$

and that if $s \geq r$ then $H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq H^r(\mathbb{R}^n)$ where the inclusion is continuous and dense. In particular, if $s \geq 0$ we are dealing with L^2 functions. As s increases things get better and better: if $k \geq 0$ is an integer, $f \in H^k(\mathbb{R}^n)$ if and only if $\partial^\alpha f \in L^2$ for all multi-indexes α such that $|\alpha| \leq k$. Moreover, according to Sobolev's Lemma, if $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ with $s > n/2$, then $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$, the set of all continuous functions that tend to zero at infinity. In this case $H^s(\mathbb{R}^n)$ is a Banach Algebra with respect to the usual multiplication of functions. In particular,

$$\| fg \|_s \leq C_s \| f \|_s \| g \|_s . \tag{1.5}$$

where C_s is a constant depending only on s and n. The reason why $3/2$ is the Sobolev Barrier for KdV can now be easily understood. We have,

$$F(u) = uu_x \in H^{s-1}(\mathbb{R}) \subset C_\infty(\mathbb{R}), \qquad s > 3/2. \tag{1.6}$$

In 1983, T. Kato proved that under the condition described by (1.6), the Cauchy Problem for KdV is locally well-posed. Actually, he considered a more general equation, and was also able to establish global well-posedness (i.e., (i), (ii), and (iii) in the definition of local well-posedness hold for all $T > 0$) in case $s \geq 2$ (see [10]). It should be remarked that global well-posedness with $s \geq 3$ was obtained in the mid-seventies in [5] and [4]. The step from $s \geq 3$ to $s > 3/2$ is, however, a very difficult one. The "Sobolev Barrier" for KdV was first broken by Kato [10], in a weak sense, and then completely, in a remarkable series of papers by C. Kenig, G. Ponce and L. Vega (see for instance [12], [13], [14], where large classes of equations are treated). Their best result in the case of KdV is local well-posedness in $H^s(\mathbb{R})$ with $s > -3/4$ (the Dirac δ function can be taken as initial condition! See also [17]). One should also mention the work of J. Bourgain [6] where global well-posedness of KdV in $L^2(\mathbb{R})$ obtained for the first time.

Let us now plunge once again into the depths below the Sobolev Barrier and describe a "new" problem to which we will apply our "old" methods. We are interested in solving the KdV equation with bore-like data, that is

$$\begin{aligned} \partial_t u + uu_x + u_{xxx} &= 0 \\ u(0) &= g \end{aligned} \tag{1.7}$$

where g is bore-like, i.e., g satisfies

$$\begin{aligned} &(1) \quad g(x) \to C\pm \quad \text{as } x \to \pm\infty \\ &(2) \quad g' \in H^s(\mathbb{R}) \quad s \geq 0 \\ &(3) \quad g - C_+ \in L^2([0,\infty)), \quad g - C_- \in L^2((-\infty,0]). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Note that the first two conditions imply that g is a bounded function. In fact all we need to know about g in this article is that $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ and that (2) holds. The real reason for introducing conditions (1) – (3) is that they model certain travelling waves that occur in nature. Such a wave is formed when a large river, like the Amazon, flows into the sea at times of exceptionally high tide. The wave moves upstream two or three times as fast as the normal tidal current, with a shape which corresponds roughly to the one described by the above conditions. For more information on bores we refer the reader to [3].

The problem with bores is that $\| g \|_0 = \infty$, and Sobolev Space methods, in principle, cannot be applied. Not all is lost however: the following simple Lemma comes to the rescue.

Lemma 1. *Let g satisfy conditions (1) and (2). Then for each $\theta \in (0,\infty)$ there exists a $\psi_\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ such that $\psi_\theta' \in H^\infty(\mathbb{R})$ and $\phi_\theta = g - \psi_\theta \in H^{s+1}(\mathbb{R})$, $s \geq 0$. Moreover*

$$\|g - \psi_\theta\|_0 \leq \sqrt{2\theta} e^{-1/2} \|g'\|_0$$

$$\|\psi_\theta'\|_s \leq C(s,\theta)\|g'\|_0 . \tag{1.9}$$

Finally, if g satisfies (3) then ψ_θ also has this property and $\lim_{x\to\pm\infty} \psi_\theta = C_\pm$.

Proof. Define $\psi_\theta = K_\theta * g$ where $K_\theta(x) = (4\pi\theta)^{-1/2}\exp(-|x|^2/4\theta)$ is the heat kernel. The result then follows easily taking the Fourier transform of ψ_θ. □

Now, let θ be fixed, write $\psi = \psi_\theta$ for simplicity, and let $w = u - \psi$. Then u is a solution of (1.7) with $u(0) = g$ if and only if w satisfies

$$\partial_t w + w w_x + w_{xxx} + (\psi w)_x + \psi\psi' + \psi''' = 0$$

$$w(0) = g - \psi = \phi .$$

This is the problem that we will study. Observe that the PDE in (1.10) is very much like KdV. It has two extra terms, one which is linear in w with a smooth x-dependent coefficient while the other does not depend on w and is rather smooth. For these reasons it is to be expected that (1.10) can be treated much in the same way as KdV. This is true up to a point. If we are below the "Sobolev Barrier", we can employ parabolic regularization and the Bona-Smith approximation technique (see [7] and [5]) to show that (1.10) is locally well-posed (alternatively one can apply Kato's quasi-linear theory or the Kato-Lai version of Galerkin's method; see [11], [10] and the references therein). Once this has been established, the *a priori* estimates which are necessary to prove global existence can be obtained from the conserved quantities associated to the KdV equation (see Section 3). On the other hand it does not seem possible to extend the well-posedness results to larger spaces using the Kenig, Ponce and Vega techniques since ψ is merely a bounded function and does not belong to L^2.

Before we proceed, it should be remarked that the theory that is established below generalizes the results obtained by Bona, Rajophadye and Schonbek in [3]. In this work they proved that (1.7) has a unique solution u such that $u(t) - \psi \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}))$ with $s \geq 3$, and some $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ satisfying $g - \psi \in H^\infty(\mathbb{R})$. In order to accomplish their ends, they considered the Cauchy problem

$$\partial_t u + u u_x + u_{xxx} - \nu u_{xx} = 0$$

$$u(0) = g \tag{1.11}$$

where $\nu \geq 0$.and regularized it adding the term $\epsilon u_{xxt}, \epsilon > 0$. Thus they are able to rely on the theory of the regularized long wave equation (a.k.a. BBM which stands for Benjamin, Bona and Mahoney; see [1]).

Note that besides the non-linear and dispersive effects, (1.11) also features a dissipative term which does not occur in (1.7). However as will be clear from what follows, our method can easily accommodate such a term.

The remainder of this work is organized as follows: in sections 2 and 3 we discuss local and global existence for (1.7) while in section 4 we make remarks about some other interesting problems to which the "old" methods can be applied quite successfully.

§2 Local existence in $H^s(\mathbb{R})$, $s > 3/2$

In order to solve (1.10), locally in time, we will use parabolic regularization, i.e., we will introduce an artificial viscosity, solve the regularized problem and then take limits as the viscosity tends to zero. A little more precisely, we consider the Cauchy Problem

$$\partial_t w = Q_\mu w - w w_x - (\psi w)_x - (\psi\psi' + \psi'')$$

$$w(0) = \phi \in H^s(\mathbb{R}) \tag{2.1}$$

where $\mu > 0$ and $Q_\mu = \mu\partial_x^2 - \partial_x^3$.

Using the venerable Method of Variation of Parameters we can show that (2.1) is equivalent to the integral equation

$$w(t) = E_\mu(t)\phi - \int_0^t E_\mu(t-t')\left[(\psi w(t'))_x + (w w_x)(t') + (\psi\psi' + \psi''')\right] dt' \tag{2.2}$$

This equivalence is in fact rigorous in view of the following Lemma which asserts that $t \longrightarrow E_\mu(t)$, the semigroup generated by Q_μ, is infinitely smoothing.

Lemma 2. *Let $\mu > 0$, $\lambda \geq 0$, $r \in R$. Then $t \in [0,\infty) \longrightarrow E_\mu(t) = \exp(tQ_\mu)$ defines a contraction semigroup in $H^r(\mathbb{R})$ and satisfies*

$$\| E_\mu(t) f \|_{r+\lambda} \leq K_\lambda \left(1 + \left(\frac{1}{2\mu t}\right)^\lambda\right)^{1/2} \|f\| \tag{2.3}$$

for all $f \in H^r(\mathbb{R})$ where K_λ is a constant that depends only on λ. Moreover, the map $t \in (0,\infty) \longrightarrow E_\mu(t)f$ is continuous with respect to the topology of $H^{r+\lambda}(\mathbb{R})$ and is the unique solution of

$$\begin{aligned} v &\in C([0,\infty), H^r(R)) \\ \partial_t v &= Q_\mu v \\ v(0) &= f . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Finally, if $\mu = 0$, $t \in [0,\infty) \to E_0(t) = \exp(-t\partial_x^3)$ can be extended as an unitary group to the whole real line.

Proof. The proof consists in a simple computation using the Fourier Transform. See Lemma 1.1 of [7]. □

Introducing the complete metric space

$$\Omega_s(T) = \left\{ v \in C([0,T), H_s(\mathbb{R}) \mid \|v(t) - E_\mu(t)\phi\| \leq M \ \forall\, t \in [0,T] \right\} \tag{2.5}$$

and the mapping

$$(Av)(t) = E_\mu(t)\phi - \int_0^t E_\mu(t-t')\left[(\psi v(t'))_x + (vv_x)(t') + (\psi\psi' + \psi''')\right] dt' \tag{2.6}$$

and combining these definitions with Lemma 2, it is not difficult to show that

Proposition 3. *Let $\mu > 0$ be fixed and $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/2$. Then there exists a $T_s = T_s(s, \|\phi\|_s, \mu) > 0$, and a unique solution $w_\mu \in C([0,T_s], H^s(\mathbb{R}))$ of (2.1), such that $w_\mu \in C((0,T_s], H^\infty(\mathbb{R}))$, where $H^\infty(\mathbb{R}) = \cap_{r\in\mathbb{R}} H^r(\mathbb{R})$ endowed with its usual Fréchet topology.*

Proof. The proof is standard and will only be briefly outlined. The details can be found in [8] and [7] for example. Existence and uniqueness in $\Omega_s(T)$ is a routine application of Banach's Fixed Point Theorem. It is then easy to establish uniqueness in $C([0,T_s], H^s(\mathbb{R}))$. The fact that $w_\mu \in C((0,T_s], H^\infty(\mathbb{R}))$ follows from an easy bootstrapping argument. □

The next step is take the limit as $\mu \downarrow 0$. The main difficulty is the fact that $T_s \to 0$ as $\mu \downarrow 0$. One must therefore show that all solutions can be extended to a time interval independent of μ. Once this is done, arguments which are, by now, standard show that (see for instance [9], [7])

Theorem 4. *Let $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, $s > 3/2$. Then there exists a $T = T(s, \|\phi\|_s)$ and a unique $w \in C([0,T_s], H^s(\mathbb{R}))$ satisfying (1.10), and therefore $u = w + \phi$ is the unique solution of (1.7).*

We will now indicate how to prove that there exists an existence interval independent of μ. Since $w_\mu(t) \in H^\infty(\mathbb{R})$ for all $t \in (0, T_s(s, \|\phi\|_s, \mu)]$ (see Proposition 3), we may safely differentiate $\|w_\mu(t)\|_s$ with respect to t to get

$$\partial_t \|w_\mu(t)\|_s = 2\,(w \mid \partial_t w)_s \tag{2.7}$$

Taking the PDE in (2.1) into (2.7), we obtain a sum of inner products which we proceed to estimate. Since ∂_x is antisymmetric and we are dealing with real valued functions (this last fact is used in the second equality below), we have

$$-(w \mid -\mu w_{xx})_s = -\mu \|w_x\|_s \leq 0$$

$$-(w|w_{xxx})_s = (w_x \mid \partial_x w_x)_s = 0. \tag{2.8}$$

Next, $(w \mid (\psi w)_x)_s = -(w_x|\psi w)_s = -((\frac{w^2}{2})_x \mid \psi)_s = (\frac{w^2}{2} \mid \psi')_s$, so

$$\left|(w \mid (\psi w)_x)\right|_s \leq \frac{1}{2}\|\psi'\|_{L^\infty}\|w\|_s^2 \tag{2.9}$$

Moreover it is easy to see that

$$\left|(w \mid \psi\psi' + \psi''')_s\right| \leq \left\|\psi\psi' + \psi'''\right\|_s \|w\|_s. \tag{2.10}$$

Finally in order to deal with the nonlinear term, we employ the following inequality due to Kato (see Lemma A.5 in the Appendix of [10])

$$\left|(f \mid ff_x)_s\right| \leq C_s \|f\|_s^3 \tag{2.11}$$

with $f \in H^s(\mathbb{R})$ real valued and $s > 3/2$ (and this is sharp!). It follows that

$$\partial_t \left\|w_\mu(t)\right\|_s^2 \leq C(s,\psi)\Big(\left\|w_\mu(t)\right\|_s^3 + \left\|w_\mu(t)\right\|_s^2 + \left\|w_\mu(t)\right\|_s\Big). \tag{2.12}$$

Defining $\rho(t)$ by

$$\partial_t \rho = C(s,\psi)(\rho^{3/2} + \rho + \rho^{1/2})$$

$$\rho(0) = \|\phi\|_s^2$$

it follows at once that $\|w_\mu(t)\|_s^2 \leq \rho(t)$ whenever both sides are defined. Since $\rho(t)$ does not depend on μ, it follows that all solutions can be extended to some interval $[0,T]$ with $T < T^*$, where T^* is the blow up time for $\rho(t)$.

It should be remarked that the proof of local existence sketched above works equally well in case the nonlinearity uu_x is replaced by $u^p u_x$, $p = 2, 3, 4, \ldots$, or even by $a(u)u_x$ where a satisfies the assumptions of the local existence theorem of [10].

§3 Global existence: the miracle of the L^2 norm

In order to prove global existence we need to obtain *a priori* estimates that imply that the solutions of the PDE under study do not blow up in finite time. To accomplish this end one needs additional information about the equation at hand. In our case we will employ the *Hamiltonian Structure* associated to the KdV equation. Note that KdV can be written in the form

$$\partial_t u = -\partial_x\left(\frac{u^2}{2} + \partial_x^2 u\right) = -\partial_x \Phi_3'(u)$$

$$\Phi_3(u) = \int_{\mathbb{R}} \left[(\partial_x u)^2 - \frac{u3}{3}\right] dx \tag{3.1}$$

where Θ' denotes the Gateuax derivative of the real-valued functional Θ. It is not difficult to verify directly that $\Phi_3(u)$ is conserved by the KdV flow. In fact there are infinitely many such quantities ([15], [18]). The first four are $\Phi_3(u)$ and

$$\begin{aligned}\Phi_1(u) &= \int_{\mathbb{R}} u\,dx \\ \Phi_2(u) &= \int_{\mathbb{R}} u^2\,dx \\ \Phi_4(u) &= \int_{\mathbb{R}} \Big[(\partial_x^2 u)^2 - \tfrac{5}{3}u(\partial x u)^2 + \tfrac{5}{36}u^4\Big] \end{aligned} \tag{3.2}$$

Note that one can, in principle, obtain *a priori* estimates for $\|u\|_0$, $\|\partial_x u\|_0$ and $\|\partial_x^2 u\|_0$ from Φ_2, Φ_3 and Φ_4 respectively. The remaining conserved quantities will provide similar estimates for the higher order derivatives (see [5] and [4]). Moreover it can be shown that all these quantities are in involution, i.e.,

$$\big(\Phi_j'(u) \mid \partial_x \Phi_k'(u)\big) = 0 \tag{3.3}$$

for all "reasonable" functions v and all positive integers j, k. Now, we look at (1.10) as a perturbation of KdV, that is, we rewrite this Cauchy Problem as

$$\begin{aligned}\partial_t w &= -\partial_x \Phi_3'(w) - (\psi w)_x - (\psi\psi' + \psi''') \\ w(0) &= \phi \end{aligned} \tag{3.4}$$

and try to get *a priori* estimates for the solutions studying how $\Phi_j'(w(t))$ varies with respect to time. And here we have the miracle of the L^2 norm! Combining (3.3) and the Chain Rule we get

$$\begin{aligned}\partial_t \tfrac{1}{2}\|w(t)\|_0^2 &= (w \mid \partial_t w)_0 \\ &= (\Phi_2'(w) \mid \partial_t w)_0 = -(w \mid (\psi w)_x + \psi\psi' + \psi''')_0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

from which it follows easily that

$$\partial_t \tfrac{1}{2}\|w(t)\|_0^2 \le \tfrac{1}{2}\|\psi'\|_{L^\infty}\|w\|_0^2 + \|\psi\psi' + \psi'''\|_{L^\infty}\|w\|_0 . \tag{3.6}$$

Gronwall's inequality then implies

$$\|w(t)\|_0^2 \le C(\phi,\psi)\,\exp[-C(\phi,\psi)t] \tag{3.7}$$

for all $t \in [0,\infty)$. This estimate shows that the L^2 norm of $w(t)$ cannot blow up in finite time. But why is this a miracle? Consider the case of the modified KdV equation, namely

$$\begin{aligned}\partial_t u + u^2 u_x + u_{xxx} &= 0 \\ u(0) &= g \end{aligned} \tag{3.8}$$

Defining $w = u - \psi$, one can proceed as before to obtain

$$\begin{aligned}\partial_t u &= -(w^2 w_x + w_{xxx} + 2\psi w_x + \psi' w^2 + 2\psi\psi' + \psi^2\psi' + \psi''') \\ w(0) &= \phi = g - \psi \end{aligned} \tag{3.9}$$

Multiplying this equation by w and integrating with respect over the real line one obtains a formula for $\partial_t \|w(t)\|_0^2$. All terms in this expression can be easily estimated by quantities of the form $C(\phi,\psi)\,(\|w\|_0^2 + \|w\|_0)$, except for

$$\int_{\mathbb{R}} (2\psi w^2 w_x + \psi' w^3)\,dx = \frac{2}{3}\int_{\mathbb{R}} \psi' w^3\,dx \tag{3.10}$$

which obviously cannot. The same kind of difficulty occurs for higher powers. The frustrating thing is that all derivatives can be estimated in terms of the L^2 norm so that if one could get an *a priori* estimate for the L^2 norm one would be done.

Finally we would like to give the reader a taste of what is involved in the estimation of the higher order derivatives in the case of (1.10) once the L^2 norm has been taken care of. Note that combining (3.1), (3.3) and the Chain Rule we obtain

$$\begin{aligned}\partial_t \Phi_3(w) &= (\Phi_3'(w) \mid \partial_t w) \\ &= -\big(\Phi_3'(w) \mid (\psi w)_x + \psi\psi' + \psi''' - \mu\partial_x^2 w\big)_0 . \end{aligned} \tag{3.11}$$

It is not difficult to check that the part of the above inner product that does not contain μ can be estimated by a quantity of the form

$$C(\phi,\psi)\,\big[\,\|w_x\|_0^2 + \|w_x\|_0^{3/2} + \|w_x\|_0\,\big] .$$

The tricky part is to handle the inner product containing the second derivative. This is how it goes:

$$\begin{aligned}-\mu\Big(\Phi_3'(w) \mid \partial_x^2 w\Big)_0 &= -\mu\Big(\frac{w^2}{2} + \partial_x^2 w \mid \partial_x^2 w\Big)_0 \\ &= \mu\Big[-\|\partial_x^2 w\|_0^2 + \Big(\frac{w^2}{2} \mid \partial_x^2 w\Big)_0\Big] \\ &\le \mu\Big[-\|\partial_x^2 w\|_0 + \|w\|_{L^\infty}\|\partial_x^2 w\|_0\Big] \\ &\le \mu C(T,\phi,\psi)\Big[-\|\partial_x^2 w\|_0^2 + \|w_x\|_0\,\|\partial_x^2 w\|_0\Big] \end{aligned} \tag{3.12}$$

in any fixed (but arbitrary) interval $[0,T]$, where we have used the inequality

$$\|w\|_{L^\infty} \leq 2\|w\|_0 \|w_x\|_0 \leq \|w\|_0^2 + \|w_x\|_0^2,$$

and the fact that we have already controlled the L^2 norm. Since

$$f(y) = -y^2 + \alpha y \leq \tfrac{1}{2}\alpha^2$$

for all $y \in \mathbb{R}$ where α is a real constant we arrive at an estimate of the form

$$-\mu\big(\Phi_3'(w) \mid \partial_x^2 w\big)_0 \leq \mu C_1(T,\phi,\psi) + \mu C_1(T,\phi,\psi)\|w_x\|_0^2. \tag{3.12}$$

Combining these estimates with the definition of Φ_3, we obtain

$$\begin{aligned}\|w_x\|_0^2 &= \Phi_3(w) + \int_{\mathbb{R}} w^3\,dx \\ &\leq \Phi_3(\phi) + \int_{\mathbb{R}} |w|^3\,dx \\ &\quad + C\int_0^t \Big(\|w_x(t')\|_0^2 + \|w_x(t')\|_0^{3/2} + \|w_x(t')\|_0\Big)dt'.\end{aligned} \tag{3.13}$$

where $C = C(T,\mu,\phi,\psi)$ is continuous with respect to μ up to $\mu = 0$. Finally, it is not difficult to check that

$$\int_{\mathbb{R}} |w|^3\,d \leq C(T,\mu,\phi,\psi)\,\|w_x\|_0^{1/2}.$$

These results combined with Gronwall's Inequality imply that

$$\|w_x\|_0^2 \leq F(T,\mu,\phi,\psi)$$

with $F(T,\mu,\phi,\psi)$ continuous with respect to μ up to $\mu = 0$. A similar argument involving Φ_4 shows that the second derivative does not blow up in finite time. In view of the local results described in the previous section it follows that (1.7) is globally well-posed in $H^2(\mathbb{R})$. Combining this with Lemma A.5 of [10] and Gronwall's Inequality we obtain global well-posedness in $H^s(\mathbb{R})$ for all $s > 2$. More precisely,

Theorem 5. *Let $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 2$. Then there exists a unique*

$$w \in C([0,\infty), H^s(\mathbb{R})) \cap L^\infty([0,\infty), H^s(\mathbb{R})) \tag{3.14}$$

satisfying (1.10) where the time derivative is computed with respect to the topology of $H^{s-3}(\mathbb{R})$. Therefore $u = w + \phi$ is the unique global solution of (1.7). Moreover, the solution depends continuously on the initial data in the sense that if $\phi_n \longrightarrow \phi$ in $H^s(\mathbb{R})$, then for any $T > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} = 0 \tag{3.15}$$

where u_n is the unique global solution corresponding to ϕ_n.

A complete proof of this result, along the lines described above, can be found in [8]. It should be noted that instead of using Lemma A.5 of [10] one could proceed as in [5], i.e., use the remaining conserved quantities to obtain *a priori* bounds for all the higher order derivatives, thus establishing global well-posedness in $H^k(\mathbb{R})$, $k = 3,4,\ldots$, and then using non-linear interpolation to handle the non-integer values of s. This second method yields sharper estimates for the H^s norms of the solution since the use of Gronwall's Inequalities leads exponential estimates for these norms while the conservation laws, due to their polynomial nature, imply that the norms in question grow at most polynomially as $t \longrightarrow \infty$. On the other hand, use of Kato's result provides a far shorter proof of global well-posedness.

§4 Some final remarks

In this section we will describe very briefly some other recent applications of the methods described above. First of all, as shown in [8], similar results hold for the Benjamin-Ono equation with bore-like initial data,

$$\begin{aligned}\partial_t u + uu_x + \sigma u_{xx} &= 0 \\ u(0) &= g\end{aligned} \tag{4.1}$$

In fact, the only difference is that the time derivative is computed in $H^{s-2}(\mathbb{R})$ instead of $H^{s-3}(\mathbb{R})$, since σ, the Hilbert transform, is unitary in $H^r(\mathbb{R})$ for all $r \in \mathbb{R}$. The global well-posedness of the Cauchy Problem associated to the following generalization of the Kuramoto-Sivashinsky equation

$$\begin{aligned}\partial_t v + \tfrac{1}{2}(v_x)^2 + \delta v_{xxx} + \beta(v_{xx} + v_{xxxx}) &= 0 \\ u(0) &= h\end{aligned} \tag{4.2}$$

was established in [2] with $h \in H^s(\mathbb{R}), s \geq 2$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$ and $\delta^2 + \beta^2 \neq 0$ (since otherwise the solutions of the resulting equation may develop shocks). Due to a happy accident however, one is able to break the Sobolev Barrier in this case. Note that if $w = v_x$ then

$$\begin{aligned}\partial_t w + ww_x + \delta w_{xxx} + \beta(w_{xx} + w_{xxxx}) &= 0 \\ w(0) &= h'\end{aligned} \tag{4.3}$$

and the PDE in (4.3) is a perturbation of KdV. It is then possible to combine the global theory obtained using the methods described in the previous sections with the results established by Kenig, Ponce and Vega (see [12] and [13]) to extend well-posedness to $H^s(\mathbb{R}), s \geq 1$.

Systems of equations can also be treated: in [16] J. Angulo Pava used parabolic regularization to establish the local well-posedness of the Cauchy Problem

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x v + u\partial_x u &= 0 \\ \partial_t v - \partial_x^3 u + \partial^x u + \partial_x(uv) &= 0 \\ u(x,0) = \phi, v(x,0) &= \psi \end{aligned} \tag{4.4}$$

with $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ and $(\phi, \psi) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^{s-1}(\mathbb{R}), s > 3/2$. Global existence is more difficult than in the preceding cases because the only "good" conserved quantity known is

$$\Phi(u,v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(u^2 + v^2 + u^2 v + (u_x)^2\right) dx \tag{4.5}$$

nd there is an obvious gap between the local theory and the *a priori* estimates obtainable from (4.5). However, it is possible to combine the local results with Kenig, Ponce and Vega type techniques and stability theory to prove that there is an orbitally stable solitary wave solution and that (4.4) is globally well-posed in $H^1(R) \times L^2(R)$ if the initial condition (ϕ, ψ) is sufficiently close to the travelling wave in an appropriate sense.

Acknowledgements

One of the authors (R. J. Iório, Jr.) would like to thank everyone involved in the Escuela de Verano for their kind hospitality. Special thanks go to Professors José Escobar and Jaime Lesmes for their warmth and generosity, and for making the author's stay a most pleasant one.

References

[1] T. B. Benjamin, J. L. Bona and J. J. Mahony, *Model Equations for Long Waves in Nonlinear Dispersive Systems*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **272** no. 1220 (1972), 47–78.

[2] H. A. Biagioni, J. L. Bona, R. J. Iório, Jr. and M. Scialom, *On the Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky Equation*, Adv. Differential Equations **1** no. 1 (1996), 1–20.

[3] J. L. Bona, S. V. Rajopadhye, and M. E. Schonbek, *Models for Propagation of Bores I. Two-dimensional Theory*, Differential Integral Equations **7** no. 3–4 (1994), 699–734.

[4] J. L. Bona and R. Scott, *Solutions of the Korteweg-de Vries Equation in Fractional Order Sobolev Spaces*, Duke Math. J. **48** no. 1 (1976), 87–99.

[5] J. L. Bona and R. Smith, *The Initial-Value Problem for the Korteweg-de Vries Equation*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **278** no. 1287 (1975), 555–601.

[6] J. Bourgain, *Fourier Transform Restriction Phenomena for Certain Lattice Subsets and Applications to Nonlinear Evolution Equations I: Schrödinger Equations*, Geom. Funct. Anal. **3** no. 2 (1993), 107–156; *II: The KdV Equation* **3** no. 3 (1993), 209–262.

[7] R. J. Iório, Jr., *KdV, BO and Friends in Weighted Sobolev Spaces*, in "Functional-analytic Methods for Partial Differential Equations (Tokyo, 1989)" (T. Ikebe, H. Fujita and S. T. Kuroda, eds.), Lecture Notes in Math., vol. 1450, Springer Verlag, 1990, pp. 104–121.

[8] R. J. Iório, Jr., F. Linares and M. Scialom, *KdV and BO Equations with Bore-Like Data*, Preprint, IMPA.

[9] T. Kato, *Nonstationary Flows of Viscous and Ideal Fluids in* $\mathbb{R}^3$, J. Funct. Anal. **9** no. 3 (1972), 296–305.

[10] ———, *On the Cauchy Problem for the (Generalized) Korteweg-de Vries Equation*, in "Studies in Applied Mathematics", Adv. Math. Suppl. Stud. **8** (V. Guillemin, ed.), Academic Press, 1983, pp. 93–128.

[11] T. Kato and Y. C. Lai, *Nonlinear Evolution Equations and the Euler Flow*, J. Funct. Anal. **56** no. 1 (1982), 15–28.

[12] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *On the (Generalized) Korteweg-de Vries Equation*, Duke Math. J. **59** no. 3 (1989), 585–610.

[13] ———, *Well-Posedness of the Initial Value Problem for the Korteweg-de Vries Equation*, J. Amer. Math. Soc. **4** no. 2 (1991), 323–347.

[14] ———, *A Bilinear Estimate with Applications to the K-dV Equation*, J. Amer. Math. Soc. **9** no. 2 (1996), 573–603.

[15] P. D. Lax, *A Hamiltonian Approach to the KdV and Other Equations*, in "Nonlinear Evolution Equations" (Proc. Sympos. Univ. Wisconsin, Madison, Wis, 1977) (M. G. Crandall, ed.), Academic Press, 1978, pp. 207–224.

[16] J. Angulo Pava, *On the Cauchy Problem for a Dispersive System of Long Waves*, preprint, IMPA.

[17] Y. Tsutsumi, *The Cauchy Problem for the Korteweg-de Vries Equation with Measures as Initial Data*, SIAM J. Math. Anal. **20** (1989), 582–588.

[18] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, J. Wiley and Sons, 1974.

José Iório, Jr.
IMPA
Estrada Dona Castorina 110, Jardim Botânico
20460 Rio de Janeiro, R.J.
Brasil
e-mail: rafael@impa.br

Felipe Linares
IMPA
Estrada Dona Castorina 110, Jardim Botânico
20460 Rio de Janeiro, R.J.
Brasil
e-mail: linares@impa.br

Márcia A. G. Scialom
IMECC/UNICAMP, Campinas, Brazil
e-mail: scialom@ime.unicamp.br

Memorias III Escuela de Verano
Geometría Diferencial
Ecuaciones Diferenciales Parciales
y Análisis Numérico
Universidad de los Andes, 20 a 30 de junio de 1995
páginas 75–82

A method for solving PDE's by using wavelet packet bases

PASCAL JOLY

Université de Paris VI, France

§1 Introduction

There are phenomena which are particularly difficult to simulate in numerical computation, such as singularities and sharp transitions in solutions of partial differential equations. For example, in fluid dynamics there are shock waves in compressible gas flows, or vortex sheets in incompressible gas flows. Because they occur in small regions of the domain, which are not precisely delimited, it is very difficult to get accurate approximations of them. The recent development of adaptive numerical methods devoted to this purpose, shows the interest of numerical analysts for such problems. Most of these methods use a sequence of nested grids that are progressively finer, where the current resolution of the numerical solution is not sufficient. The main difficulty of such methods is to find stable and accurate approximations of the differential operator at the interface between grids of different sizes.

Many authors have shown that the multiresolution structure of wavelet orthonormal bases is a simple and effective framework for spatial and temporal adaptive algorithms (see V. Perrier & C. Basdevant [13], J. Liandrat & P. Tchamitchian [10], E. Bacry, S. Mallat & G. Papanicolaou [2]). This paper is an introduction to the general framework of multiresolution analysis, and to its use in numerical simulation.

The outline of this paper is as follows: Section 2 is an introduction to multiresolution analysis, Section 3 presents the wavelet packet bases, and in Section 4 we briefly discuss some numerical results.

§2 Multiresolution analysis

2.1 Definition.

Multiresolution analysis of $L^2(\mathcal{R})$ was introduced by S. Mallat [11] and Y. Meyer [12]. Any element f of $L^2(\mathcal{R})$ is approximated at the resolution 2^j by the projection of f on a subspace V_j of the multiresolution analysis. The sequence of subspaces $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ is defined by the following relations

(1) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\} \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$
(2) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$
(3) there exists a function g in V_0, such that $\{g(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ is a Riesz basis of V_0.

2.2 The scaling function.

Then we may introduce the scaling function φ by the relation

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(\omega+2l\pi)|^2\Big)^{-1/2} \widehat{g}(\omega)\,,$$

and define the functions φ_k^j by

$$\varphi_k^j(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k), \qquad \forall x\in\mathbb{R}, \quad \forall\, j,k\in\mathbb{Z}$$

The functions $\{\varphi_k^j\}_{k\in\mathbb{Z}}$ generate closed subspaces $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$, and it is possible to show that

(4) $V_j \subset V_{j+1} \Leftrightarrow \exists m_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ 2π-periodic such as
$\widehat{\varphi}(2\omega) = m_0(\omega)\widehat{\varphi}(\omega)$
(5) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
(6) $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ is dense in $L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow |\widehat{\varphi}(0)| = |\int \varphi(x)\,dx| = 1$

Two successive scales of approximation are related by

$$\widehat{\varphi}(2\omega) = m_0(\omega)\widehat{\varphi}(\omega)\,,$$

so

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \Big(\prod_{k=1,n} m_0(2^{-k}\omega)\Big)\,\widehat{\varphi}(2^{-n}\omega)\,,$$

and because $\widehat{\varphi}(0) = 1$, and $\widehat{\varphi}$ is a regular function,

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{k=1,\infty} m_0(2^{-k}\omega)\,.$$

Thus m_0 is sufficient to define φ, and thus the complete multiresolution analysis.

2.3 The wavelet function.

Suppose now that we know a function m_0 (or a scaling function φ). Define the function m_1 by

$$m_1(\omega) = \overline{m_0(\omega+\pi)}\,e^{-i\omega} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-k}\, e^{-ik\omega}\,.$$

In signal theory, m_0 is a filter, and m_1 is the conjugate filter.

Again we introduce the function ψ by

$$\widehat{\psi}(\omega) = m_0(\omega/2)\,\widehat{\varphi}(\omega/2)\,,$$

and the functions ψ_k^j by

$$\psi_k^j(x) = 2^{j/2}\,\psi(2^j x - k), \qquad \forall x\in\mathbb{R}, \quad \forall\, j,k\in\mathbb{Z}\,.$$

These functions $\{\psi_k^j\}_{k\in\mathbb{Z}}$ generate closed subspaces $W_j \subset L^2(\mathbb{R})$, and because the matrix

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} m_0(\omega) & m_1(\omega) \\ m_0(\omega+\pi) & m_1(\omega+\pi) \end{pmatrix}$$

is unitary for all $\omega \in [0, 2\,\pi]$, the subspace W_j is the orthonormal complement of V_j in V_{j+1}:

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1}\,.$$

ψ is then the wavelet function, and the W_j are the wavelet subspaces.

2.4 The periodic case.

Multiresolution analysis is also available in a bounded domain. Y. Meyer [12] has defined the multiresolution analysis of $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ by changing the definition of the functions φ_k^j and ψ_k^j:

$$\forall\, x\in[0,1] \quad \varphi_k^j(x) = 2^{j/2}\sum_{z\in\mathbb{Z}} \varphi(2^j(x+z)-k) \qquad j\geq 0, \quad 0\leq k<2^j$$

$$\forall\, x\in[0,1] \quad \psi_k^j(x) = 2^{j/2}\sum_{z\in\mathbb{Z}} \psi(2^j(x+z)-k) \qquad j\geq 0, \quad 0\leq k<2^j\,.$$

The subspaces V_j and W_j generated by the functions φ_k^j and ψ_k^j define the multiresolution analysis of $L^2(T)$, where T is the torus $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$; $L^2(T)$ is a set of periodic functions (with period 1). It is also possible to deal with non-periodic functions, but for this we would need to modify the present basis functions. In the following, we are only concerned with periodic functions. In which case, we consider a subspace $V_p \subset L^2(T)$ of dimension 2^p, and the associated multiresolution analysis:

$$V_p = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_{p-1}\,.$$

2.5 The Mallat transform.

From a practical point of view, it is important to compute the components of the projection of any element f of $L^2(T)$ in the susbpaces V_j and W_j at minimal cost. These components are computed by the Mallat transform in the following way: suppose we know the components c_k^{j+1} of $P_{j+1}f \in V_{j+1}$, then from the relation

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j ,$$

we get

$$P_{j+1}f = P_j + \tilde{P}_j f ,$$

with

$$P_j f \in V_j = \sum_{k=0}^{2^j-1} c_k^j \varphi_k^j , \qquad \tilde{P}_j f \in W_j = \sum_{k=0}^{2^j-1} d_k^j \psi_k^j .$$

However,

$$P_{j+1}f \in V_{j+1} = \sum_{k=0}^{2^{j+1}-1} c_k^{j+1} \varphi_k^{j+1} = P_j f + \tilde{P}_j f .$$

Using the orthonormality of the wavelet bases, we can write

$$c_k^j = \sum_{l=0}^{2^{j+1}-1} c_l^{j+1} H_{j+1}(l-2k) \quad 0 \le k < 2^j$$

$$d_k^j = \sum_{l=0}^{2^{j+1}-1} c_l^{j+1} G_{j+1}(l-2k) \quad 0 \le k < 2^j ,$$

with

$$H_{j+1}(n) = \int_0^1 \varphi_n^{j+1}(x)\,\varphi_0^j(x)\,dx , \qquad G_{j+1}(n) = \int_0^1 \varphi_n^{j+1}(x)\,\psi_0^j(x)\,dx .$$

With this transformation, the knowledge of the 2^{j+1} coefficients c_k^{j+1} is sufficient to compute the 2^j coefficients c_k^j and the 2^j coefficients d_k^j.

The inverse computation is also available by the formula:

$$P_{j+1}f(x) = \sum_{k=0}^{2^{j+1}-1} c_k^{j+1}\varphi_k^{j+1}(x) = P_j f(x) + \tilde{P}_j f(x)$$
$$= \sum_{l=0}^{2^j-1} c_l^j \varphi_l^j(x) + \sum_{l=0}^{2^j-1} d_l^j \psi_l^j(x) ,$$

so

$$c_k^{j+1} = \sum_{l=0}^{2^j-1} c_l^j H_{j+1}(k-2l) + \sum_{l=0}^{2^j-1} d_l^j G_{j+1}(k-2l) .$$

2.6 Examples of wavelet functions.

There are many various wavelet functions, such as the Haar wavelets, the fast decreasing Meyer wavelets, the compact supported Daubechies wavelets [5], and the Battle-Lemarié wavelets [3], [9] using spline functions. In the following, we shall use the Battle-Lemarié wavelets associated with a spline function of order 4 (see [3] and [4]).

§3 The wavelet packet basis

In order to generalize the wavelet basis frame, we define

$$\widehat{\varphi_0}(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega) = m_0(\tfrac{\omega}{2})\,\widehat{\varphi}(\tfrac{\omega}{2}) \qquad \text{and} \qquad \widehat{\varphi_1}(\omega) = \widehat{\psi}(\omega) = m_1(\tfrac{\omega}{2})\,\widehat{\varphi}(\tfrac{\omega}{2}),$$

and then, for all integer $n \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{\varphi_{2n}}(\omega) = m_0(\tfrac{\omega}{2})\,\widehat{\varphi_n}(\tfrac{\omega}{2}) \qquad \text{and} \qquad \widehat{\varphi_{2n+1}}(\omega) = m_1(\tfrac{\omega}{2})\,\widehat{\varphi_n}(\tfrac{\omega}{2}).$$

Thus if $n = \epsilon_0 + 2\epsilon_1 + 2^2\epsilon_2 + \cdots + 2^{j-1}\epsilon_{j-1}$, with $\epsilon_i \in \{0,1\}$,

$$\widehat{\varphi_n}(\omega) = m_{\epsilon_0}(\tfrac{\omega}{2})\,m_{\epsilon_1}(\tfrac{\omega}{2^2}) \ldots m_{\epsilon_{j-1}}(\tfrac{\omega}{2^j})\,\widehat{\varphi}(\tfrac{\omega}{2^j})$$
$$= m_{\epsilon_0}(\tfrac{\omega}{2})\,m_{\epsilon_1}(\tfrac{\omega}{2^2}) \ldots m_{\epsilon_{j-1}}(\tfrac{\omega}{2^j}) \prod_{k=j+1}^{\infty} m_0(\tfrac{\omega}{2^k}).$$

Then we call the subspaces $\mathcal{W}_j$ wavelet packets, where the $\mathcal{W}_j$ are generated by the functions

$$\varphi_n^{j,k}(x) = 2^{j/2} \sum_{z \in \mathbb{Z}} \varphi_n(2^j(x+z)-k) \qquad \forall\, x \in [0,1] ,$$

for $0 \le n < 2^{p-j}$, $0 \le k < 2^j$, $0 \le j < p$. So we obtain a general subspace decomposition:

At any level j of the multiresolution analysis ($0 \le j \le p$), there are 2^{p-j} subspaces $\mathcal{W}_j^l$, each one of dimension 2^j ($0 \le l < 2^{p-j}-1$), the p wavelet subspaces W_j ($0 \le j < p$) corresponding to the $\mathcal{W}_{p-j}^1$.

One of the advantages of the wavelet packet basis is in the number of significant components required to represent some data in finite dimension. This is because we can choose a basis that fits well to these data, without any loss of information. For example, if we want to compute the wavelet coefficients of the function $\sin 8\pi x$ in a multiresolution analysis of dimension $2^{10} = 1024$, we would need 872 coefficients using the wavelet basis instead of 23 using the wavelet packet basis (i.e., 23 coefficients whose absolute value is greater than 10^{-10}).

§4 Solving partial differential equations

Wavelet theory has been used for a long time in signal and image coding. More recently, some people have been interested in solving partial differential equations (Amaratunga & Williams [1], [14], Glowinski et al. [6], Joly, Maday & Perrier [8]). Our aim is to use wavelets and wavelet packet bases to approximate the solutions of partial differential equations. We choose as a model problem, the 1D Burgers' equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

with periodic boundary conditions $u(0,t) = u(1,t)\ \forall t \in [0,T]$, and initial condition $u(x,0) = \sin 2\pi x\ \forall x \in [0,1]$. The numerical study of this equation may be considered a first step towards the simulation of turbulent flow.

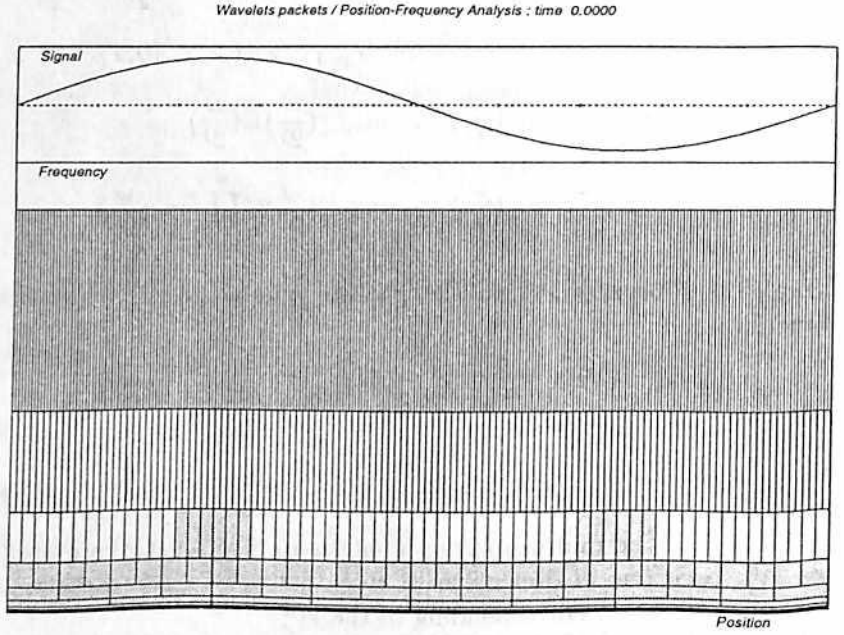

FIGURE 1: INITIAL DATA: $u(x,0) = \sin 2\pi x$

The first results are very promising: we obtain very accurate approximations. Moreover the wavelet packet approximation is very interesting, because the number of coefficients it requires is at most half of the number needed for the full wavelet approximation. For more details on this simulation, see Joly[7].

§5 Conclusions

Multiresolution analysis appears to be a very interesting way to provide accurate approximate solutions of partial differential equations, because the recent development of algorithms devoted to this purpose shows the interest of numerical analysts for such problems.

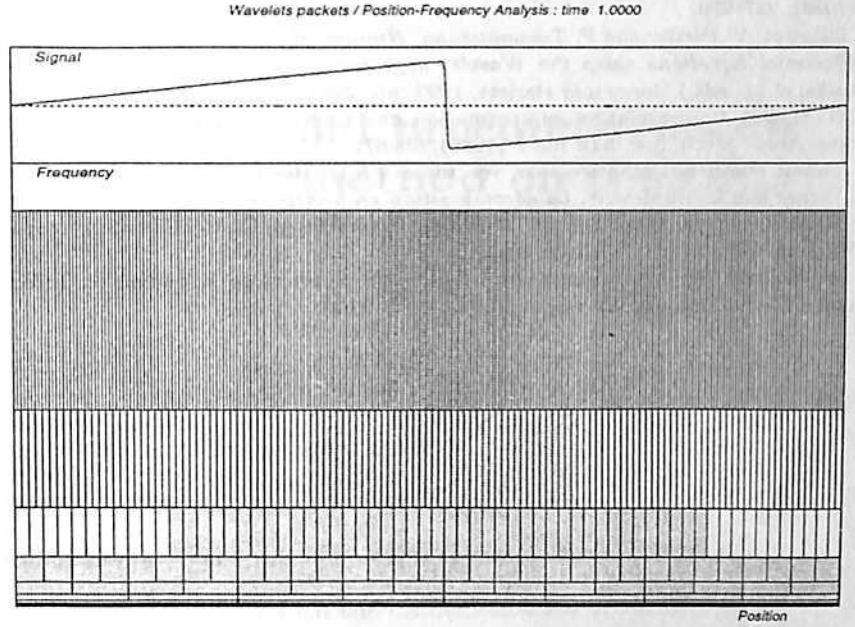

FIGURE 2: SOLUTION AT TIME $t = 1.0000$

References

[1] K. Amaratunga and J. R. Williams, *Wavelet-Galerkin solutions for one-dimensional partial differential equations*, Internat. J. Numer. Methods Engrg. **37** no. 16 (1994), 2703–2716.

[2] E. Bacry, S. Mallat and G. Papanicolaou, *A wavelet based space-time adaptive numerical method for partial differential equations*, Courant Institute of Mathematical Sciences, NYU, 1995.

[3] G. Battle, *A block spin construction of ondelettes. I: Lemarié functions*, Comm. Math. Phys. **110** no. 4 (1987), 601–615.

[4] C. de Boor, *A practical guide to splines*, Appl. Math. Sci., vol. 27, Springer, 1978.

[5] I. Daubechies, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math. **41** no. 7 (1988), 909–996.

[6] R. Glowinski, W. Lawton, M. Ravachol and E. Tenenbaum, *Wavelet solutions of linear and nonlinear elliptic, parabolic and hyperbolic problems in one space dimension*,

Computing methods in Applied Sciences and Engineering (Proceedings of the 9th International Conference on Numerical Methods in Applied Sciences and Engineering, Paris 1990) (1990), 55–120, SIAM, Philadelphia.

[7] P. Joly, *Résolution de l'équation de Burgers par paquets d'ondelettes*, Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique (1995) Université Pierre et Marie Curie, (to appear).

[8] P. Joly, Y. Maday and V. Perrier, *Towards a method for solving partial differential equations by using wavelet packet bases*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **116** no. 1–4 (1994), 301–307.

[9] P. G. Lemarié, *Ondelettes à localisation exponentielle*, J. Math. Pures Appl. (9) **67** no. 3 (1988), 227–236.

[10] J. Liandrat, V. Perrier and P. Tchamitchian, *Numerical resolution of Nonlinear Partial Differential Equations using the Wavelet approach.*, Wavelets and their Applications (Ruskai et al., eds.), Jones and Barlett, 1992, pp. 227–238.

[11] S. G. Mallat, *Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$*, Trans. Amer. Math. Soc. **315** no. 1 (1989), 69–87.

[12] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs*, vol. tomes I à III Hermann, Paris, 1990.

[13] V. Perrier and C. Basdevant, *La décomposition en ondelettes périodiques, un outil pour l'analyse de champs inhomogènes. Théorie et algorithmes*, La Recherche Aérospatiale **3** (1989), 53–67.

[14] J. R. Williams, K. Amaratunga, *Introduction to wavelets in engineering*, Internat. J. Numer. Methods Engrg. **37** no. 14 (1994), 2365–2388.

PASCAL JOLY
UNIVERSITÉ PARIS IV
LABORATOIRE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
4 PLACE JUSSIEU
(75252) PARIS (05)
FRANCE
e-mail: joly@ann.jussieu.fr

Memorias III Escuela de Verano
Geometría Diferencial
Ecuaciones Diferenciales Parciales
y Análisis Numérico
Universidad de los Andes, 20 a 30 de junio de 1995
páginas 83–90

Polynomial preconditions for the CG method on the CM2

PASCAL JOLY & OLIVIER PERLOT

Université Paris 6, France

§1 Introduction

This paper is concerned with the implementation of parallel iterative methods for solving large sparse symmetric positive definite linear systems arising from finite difference methods, $Ax = b$, on an SIMD computer, the CM-2. Specifically, we are interested in the Conjugate Gradient (CG) method introduced by Hestenes and Stiefel [8]. This method is a popular and effective linear systems solver, notably when combined with a preconditioner; one attractive possibility considered by many authors ([1], [6], [9] and [13]), is polynomial preconditioning. Its main advantage is its suitability for vector and/or parallel computers, when the matrix by vector product is parallelizable. Whenever A has a regular sparsity structure (multidiagonal), polynomial preconditioning is effective on parallel machines.

The outline of this paper is as follows: Section 2 describes the linear systems we are solving, Section 3 presents the main characteristics of the CM-2 computer, Section 4 is devoted to polynomial preconditioners and in Section 5, we present some numerical results.

§2 Description of model problems

We consider linear systems of equations that arise from the approximation of the solution of the problem:

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(\lambda \nabla u) &= f, \qquad \text{in } \Omega =]0,1[\times]0,1[, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

The first problem is the Poisson problem, $\lambda \equiv 1$.

The second problem is

$$\begin{cases} \lambda = 1000 & \text{in } \Omega =]\frac{1}{4},\frac{3}{4}[\times]0,1[, \\ \lambda = 1 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

For both problems we use a standard five-point scheme on an uniform mesh ($h = 1/(n+1)$), and thus we obtain a linear system

$$Ax = b \tag{1}$$

The matrix A is a symmetric positive definite matrix of order n^2, and is a pentadiagonal matrix with a natural ordering of the unknowns. If the matrix is stored by diagonals, then the matrix by vector product can be performed in parallel. To solve (1) we use the Preconditioned Conjugate Gradient (PCG) method of Concus, Golub and O'Leary [4].

§3 The Connection-Machine

The Connection Machine is a massively parallel local memory SIMD (Single Instruction stream Multiple Data stream) supercomputer. In fact, all processing elements (PEs, single bit processor) can execute immediately the same instructions on local different data. If they need other data from other PEs, they use a communication network (a hypercube network links sets of processors). But these communications are not very fast. Moreover the CM-2 being a synchronous supercomputer, the PEs must execute the same instruction (on different data) or nothing at the same time. Then the programming is sequential with vectors and synchronous data transfers between processors. Thus some instructions are well suited to the CM-2; saxpy, multidiagonal matrix vector product, etc. .... Therefore we are trying to use these kernels as frequently as possible to optimize the computing time. Then the CG with Diagonal preconditioner seems well-suited to the CM-2's architecture *a priori*, but all the same we will avoid point recursions like ICCG methods. The CM-2 consists at most of 65536 PEs (2048 Weitek chips), and it operates under the control of a host computer (a SUN workstation in general), and the peak Mflops rate with 65536 processors is about 30 Gflops.

Actually all tests have been performed in single precision on 8192 PEs of the CM-2 with the CM-FORTRAN language, and without any CM Scientific Software Libraries.

§4 Polynomial preconditioners

The principle of polynomial preconditioning consists in finding a preconditioner M so that:

$$M^{-1}A = P_k(A)A$$

where P_k is a polynomial, of degree less or equal to k (we denote the polynomials with some capital letter when they are applied to matrices, and with the corresponding lower case letter when they are applied to scalars). This idea may seem, at the same time, natural and strange. Natural, because from the Cayley-Hamilton theorem, the inverse A^{-1} can be expressed as a polynomial in A, but strange because CG generates an optimal polynomial (see [8]) and, in that respect, the CG polynomial after $m(k+1)$ iterations with no preconditioner is better than the polynomial generated by m iterations with a polynomial preconditioner of degree k.

In this section we review several choices for p_k. $P_k(A)$ should be in some sense an approximation of A^{-1}. Of course there are several ways of doing this. As proved by Ashby et al. in [2], there is no single best polynomial, the choice depends on the eigenvalue distribution of A, which is seldom known *a priori*.

One of the most important practical issues for using polynomial preconditioners is the estimation of smallest and largest eigenvalues of A (denoted a and b). For the model Poisson problem, we take its well-known eigenvalues $a = 8\sin^2(\pi/2(n+1))$ and $b = 8\sin^2(\pi n/2(n+1))$, which are not in fact the optimum values (see [2] and [13]). However, these eigenvalues are unknown in realistic applications. Then for solving the second problem with the more elaborate polynomial preconditioners, we propose to scale symmetrically A to have a unit diagonal. Instead of solving (1) we solve

$$D^{-1/2}AD^{-1/2}y = \tilde{A}y = D^{-1}b, \qquad \text{and} \qquad x = D^{-1/2}y. \tag{2}$$

We know that the eigenvalues of $\tilde{A}$ are in the set]0,2[, thus to solve (2) we choose $b = 2$. After an important numerical study on the behaviour of polynomial preconditioners in relation to the estimation of a, we choose $a = 0.25\ 10^{-3}$ for this problem. This value is not for this problem the optimum smallest eigenvalue, but it is sufficiently representative of the polynomial preconditioners' numerical effectiveness.

4.1 Diagonal preconditioner.

The simplest approximation M of A we consider is the diagonal matrix

$$M = \mathrm{diag}(A).$$

4.2 Truncated Neumann's series.

The second approximation, proposed by Dubois, Greenbaum and Rodrigue in [5], is based on Neumann's series. We denote $A = D-L-L^T$ by $D = \mathrm{diag}(A)$, with L strictly lower triangular. If A is a positive definite matrix, then

$$A^{-1} \;=\; D^{-1/2}\left(I - D^{-1/2}(L+L^T)D^{-1/2}\right)^{-1}D^{-1/2}.$$

Moreover, if A is diagonally dominant then the spectral radius

$$\rho(D^{-1/2}(L+L^T)D^{-1/2}) \;<\; 1$$

and the Neumann's series for the inverse of $I-D^{-1/2}(L+L^T)D^{-1/2}$ converges. We denote by NEUM1 the following preconditioner:

$$M^{-1} \;=\; D^{-1} + D^{-1}(L+L^T)D^{-1},$$

and by NEUM3:

$$\begin{aligned} M^{-1} \;=\; & D^{-1} + D^{-1}(L+L^T)D^{-1} + D^{-1}(L+L^T)D^{-1}(L+L^T)D^{-1} \\ & + D^{-1}(L+L^T)D^{-1}(L+L^T)D^{-1}(L+L^T)D^{-1}. \end{aligned}$$

According to Ashby [1], NEUM2 is worse than NEUM1.

4.3 Polynomials minimizing a generalization of the condition number.

The previous preconditioner is very easy to use, as there are no parameters to estimate. Unfortunately it may yield a poor preconditioner in relation to the convergence rate (see numerical results). Therefore we have to consider more elaborate polynomial preconditioners. In this section, we are interested in polynomials minimizing an upper bound of the condition number; the minmax polynomial.

Let $[a,b]$ be a set containing the eigenvalues of A, $0 \notin [a,b]$, and let

$$\mathcal{Q}_k \;=\; \{\text{polynomials } q_k \text{ of degree } \leq k \mid q_k(\lambda) > 0\ \forall \lambda \in [a,b],\ \text{ and } q_k(0) = 0\}$$

We are looking for $q \in \mathcal{Q}_{k+1}$ minimizing:

$$\frac{\max_{\lambda\in[a,b]} q(\lambda)}{\min_{\lambda\in[a,b]} q(\lambda)}.$$

Let $\mu(\lambda) = 2\dfrac{\lambda-b-a}{b-a}$ be the linear mapping taking $[a,b]$ into $[-1,+1]$. Then the solution is given, for example by Johnson, Michelli and Paul in [9], as:

$$q_{k+1}(\lambda) \;=\; 1 - \frac{T_{k+1}(\mu(\lambda))}{T_{k+1}(\mu(0))},$$

T_k being the Chebyshev polynomial of the first kind of order k. Then we obtain p_k by:

$$p_k(\lambda) \;=\; \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{T_{k+1}(\mu(\lambda))}{T_{k+1}(\mu(0))}\right).$$

Now, to evaluate $z = P_k(A)r = \sum_{i=0}^{k}\alpha_i A^i r$, we want to conserve both the sparsity of A and also the effective matrix by vector product. Moreover, the computation of α_i should stay simple and fast. Thus we use first a simple Hörner's scheme, which is given as follows:

$$\begin{cases} z_k \;=\; \alpha_k r, \\ z_i \;=\; \alpha_i r + A z_{i+1}, & i = k-1,\dots,0 \end{cases}$$

Then $z = z_0 = P_k(A)r$.

4.4 Least squares polynomials.

As an alternative choice, we consider polynomials minimizing some quadratic norm of the residual polynomial [9]

$$\int_a^b (1-\lambda p(\lambda))^2\,\omega(\lambda)\,d\lambda,$$

where $\omega(\lambda)$ is a weight function able to emphasize the portion of the spectrum which is the most important. In practice, we take a Jacobi weight function:

$$\omega(\alpha,\beta,\lambda) \;=\; (b-\lambda)^\alpha(\lambda-a)^\beta.$$

We denote by $s_i(\lambda)$ the associated orthonormal polynomials. The solution of this problem is:

$$p_k(\lambda) \;=\; \sum_{j=0}^{k+1} b_j t_j(\lambda),$$

with

$$b_j \;=\; \frac{s_j(0)}{\sum_{i=0}^{k+1} s_i^2(0)} \qquad \text{and} \qquad t_j(\lambda) \;=\; \frac{s_j(0)-s_j(\lambda)}{\lambda}.$$

Now we would like to compute $p_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{k+1} b_j t_j(\lambda)$. The s_i are orthonormal with respect to ω. Then they satisfy a three-term recursion:

$$s_{j+1}(\lambda) \;=\; \alpha_j \nu(\lambda) s_j(\lambda) - \gamma_{j-1} s_{j-1}(\lambda), \qquad \text{for } j \geq 1,$$

with

$$\frac{\nu(0)-\nu(\lambda)}{\lambda} \;=\; C,$$

C being a constant.

Specifically, we have studied two kinds of Jacobi polynomials; the Chebyshev polynomials ($\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$), and the Legendre polynomials ($\alpha = \beta = 0$).

§5 Numerical results on CM-2

In this section, we give results of numerical experiments in order to point out some additional facts about polynomial preconditioning on massively parallel computers. The PCG algorithms stopped as soon as the approximate residual $r_j = b - Ax_j = r_{j-1} - \alpha_{i-1}Ap_{i-1}$, satisfied $\|r_j\| \leq \epsilon\|r_0\|$, where $\epsilon = 10^{-6}$. We study the number of iterations, the Mflops rate and the computing time as a function of the polynomial degree. At first we test the model Poisson problem with a 512×512 mesh.

The first results concern the number of iterations of the PCG with these preconditioners (in fact, table 1 shows the degree which minimizes the computing time for all preconditioners).

Preconditioner	Optimal degree	Number of iterations	Total time (s)	Mflops
DIAG	0	1521	70.5	124.5
NEUM1	1	761	54.1	114.4
NEUM3	3	537	58.1	119.0
MINMAX	12	109	36.8	164.4
MCARRE	16	100	45.4	171.6
LEG	10	163	49.6	174.4

TABLE 1:
CM-2'S OPTIMAL RESULTS ON PROBLEM 1 WITH A 512×512 MESH.

The convergence rate of the polynomial preconditioners is always better than those of the diagonal preconditioner, but does depend on the choice of the polynomial. For example, the decrease in the number of iterations using truncated Neumann's series is not sufficient to allow degrees greater than 3, because of the cost of the polynomial computation. The three-term recursion evaluations are very stable and actually competitive. In fact, we can even use much higher degrees (500) with the algorithms MINMAX, MCARRE and LEG.

It has sometimes been claimed that the diagonal preconditioner can deliver the smallest computing times on massively parallel supercomputers. Table 1 proves that the polynomial preconditioners are better massively parallel preconditioners for this problem; with the optimum degree of MINMAX (12), the time required to solve the problem with the diagonal preconditioner has been nearly cut in half.

Some algorithms have a better MFlops rate than others, because at each iteration they compute more operations without communication between processors. The polynomial preconditioners are very massively parallel, because they have a very high parallelism degree, 89.5% with MINMAX and its optimum degree (12), or 98.5% with a higher degree (100).

Now, we are interested in solving an ill-conditioned linear system; the discrete version of the second problem with a 256×256 mesh. The eigenvalues of the matrix A are not explicitly known for this problem, so we have symmetrically scaled the matrix A in order to have a unit diagonal, and then we solve (2) instead of (1).

Preconditioner	Optimal degree	Number of iterations	Total time (s)	Mflops
DIAG	0	7368	129.0	82.3
NEUM1	1	3792	108.5	71.0
NEUM3	3	3238	126.3	82.4
MINMAX	31	223	52.9	142.7
MCARRE	70	108	56.4	153.4
NORM	90	87	56.6	147.4

TABLE 2:
CM-2'S OPTIMAL RESULTS ON PROBLEM 2 WITH A 256×256 MESH.

Table 2 confirms that the diagonal preconditioner is no longer the best massively parallel preconditioner for these kinds of problems. The CM-2 achieves fewer Mflops than for problem 1, only because the mesh is smaller. Nevertheless, we keep a good degree of parallelism, 93% with MCARRE and polynomial degree 100.

Finally, MINMAX, MCARRE and NORM are some of the very efficient preconditioners on massively parallel supercomputers like the CM-2.

§6 Conclusions

We have reviewed some techniques for an efficient use of PCG on massively parallel supercomputers. The main conclusion of this paper is that the polynomial preconditioners associated with a fast matrix by vector product can run much faster than the simpler but more easily parallelizable diagonal preconditioner.

Thus, for an efficient use of PCG on massively parallel supercomputers, we propose to use the MINMAX or NORM preconditioners. MINMAX gives the better results of these preconditioners, but it needs an estimation of the minimum eigenvalue $a \neq 0$, whereas NORM is independent of the eigenvalues.

The problems we propose may seem academic, but the method can handle more realistic ones, on grids topologically equivalent to 2D-rectangular grids; and it can also be used as a linear system solver in a fictitious domain approach for more general meshes.

References

[1] S. F. Ashby, *Minimax polynomial preconditioning for hermitian linear systems*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **12** no. 4 (1991), 766–789.

[2] S. F. Ashby, T. A. Manteufell and J. S. Otto, *A comparison of adaptive Chebyshev and least squares polynomial preconditioning for Hermitian positive definite linear systems*, SIAM J. Sci. Statist. Comput. **13** no. 1 (1992), 1–29.

[3] P. Ciarlet Jr., G. Meurant and O. J. Perlot, *Préconditionnements massivement parallèles*, Journées du SEH (1992).

[4] P. Concus, G. H. Golub and D. P. O'Leary, *A generalized conjugate gradient method for the numerical solution of elliptic partial differential equations*, in "Sparse Matrix Computations" (Proc. Sympos., Argonne Nat. Lib., Lemont, Ill., 1975) (J. R. Bunch and D. J. Rose, eds.); Academic Press, New York, 1976, pp. 309–332.

[5] P. F. Dubois, A. Greenbaum and G. H. Rodrigue, *Approximating the inverse of a matrix for use in iterative algorithms on vector processors*, Computing **22** no. 3 (1979), 257–268.

[6] R. W. Freund, *Polynomial preconditioners for Hermitian and certain Nonhermitian Matrices*, presented at SIAM Annual Meeting, San Diego, CA, July 1989.

[7] R. W. Freund and B. Fischer, *On adaptive weighted polynomial preconditioning for Hermitian positive definite matrices*, in "Proceedings of the Copper Mountain Conference on Iterative Methods in Numerical Linear Algebra, Copper Mountain, April 1992" SIAM J. Sci. Comput., vol. 15, pp. 408–426.

[8] M. R. Hestenes and E. Stiefel, *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*, J. Research Nat. Bur. Standards **49** (1952), 409–435.

[9] O. G. Johnson, C. A. Michelli and G. Paul, *Polynomial preconditioners for conjugate gradient calculations*, SIAM J. Numer. Anal. **20** no. 2 (1983), 362–376.

[10] J. A. Meijerink and H. van der Vorst, *An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric M-matrix*, Math. Comp. **31** no. 137 (1977), 148–162.

[11] G. Meurant, *Practical use of the C.G.M on parallel supercomputers*, Comput. Phys. Comm. **53** (1989), 467–477.

[12] S. G. Petiton and C. J. Weill-Duflos, *Very sparse preconditioned conjugate gradient on massively parallel architectures*, SEH publications, 1992.

[13] Y. Saad, *Practical use of polynomial preconditionings for the conjugate gradient method*, SIAM J. Sci. Statist. Comput. **6** no. 4 (1985), 865–881.

[14] C. Tong, *The preconditioned conjugate gradient method on the Connection Machine*, Proceedings of the Conference on Scientific Applications of the Connection Machine (Simon (Horst D), ed.), World Scientific.

PASCAL JOLY
UNIVERSITÉ PARIS IV
LABORATOIRE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
4 PLACE JUSSIEU
(75252) PARIS (05)
FRANCE
e-mail: joly@ann.jussieu.fr

OLIVIER PERLOT
UNIVERSITÉ PARIS IV
LABORATOIRE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
4 PLACE JUSSIEU
(75252) PARIS (05)
FRANCE

Memorias III Escuela de Verano
Geometría Diferencial
Ecuaciones Diferenciales Parciales
y Análisis Numérico
Universidad de los Andes, 20 a 30 de junio de 1995
páginas 91–96

Pointwise error estimates and asymptotic error expansion inequalities for the finite element method on irregular grids

ALFRED H. SCHATZ[1]

Cornell University, USA

The aim of this lecture is to derive new pointwise error estimates for the finite element method on general quasi–uniform meshes for second order elliptic boundary value problems in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. In a sense to be discussed below, these estimates represent an improvement on the now standard quasi–optimal L_∞ estimates. In order to fix the ideas, here we will deal with global estimates for a model Neumann problem with smooth solutions. Local estimates, both interior and up to the boundary, which are applicable to a variety of problems with both smooth and nonsmooth solutions can also be derived. As a consequence of these estimates, some new and useful inequalities will be given which are in the form of error expansions. They are valid for large classes of finite elements on general quasi–uniform meshes in $\mathbb{R}^N$ and have application to both superconvergence and extrapolation. Let us begin by giving a brief description of some of the main results.

Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ with smooth boundary $\partial\Omega$. Let

$$A(u,v) = \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v + c(x)uv \Big) dx \quad (1)$$

[1] Supported in part by the National Science Foundation Grant DMS 9403512

be coercive over $W_2^1(\Omega)$, and for given $f \in (W_2^1(\Omega))'$ let $u \in W_2^1(\Omega)$ be the solution of the Neumann problem with homogeneous boundary data defined by

$$A(u,v) \;=\; (f,v) \;=\; \int_\Omega fv\,dx \quad \text{for all} \quad v \in W_2^1(\Omega). \tag{2}$$

It is well known that if f is smooth in $\overline{\Omega}$ then u is also.

Now consider the approximation of u using the finite element method. Let $0 < h < 1$ be a parameter, $r \geq 2$ be an integer and $S_r^h(\Omega) \subset W_\infty^1(\Omega)$ be a family of finite element spaces. The precise assumptions on these subspaces are technical, but are satisfied by many types of commonly used finite elements. For the purposes of this lecture they may be thought of as any one of a variety of spaces of continuous functions, which on each set τ of a quasi–uniform partition of Ω, roughly of size h, contains all polynomials of degree $r-1$ and fit the boundary exactly. For example $r = 2$ could correspond to piecewise linear (or bilinear, etc.) functions, and $r = 3$ to piecewise quadratic functions, etc.. Thus they can approximate functions to order h^r in $L_\infty(\Omega)$ and order h^{r-1} in $W_\infty^1(\Omega)$. The finite element approximation $u_h \in S_r^h(\Omega)$ is taken to satisfy

$$A(u_h,\varphi) \;=\; (f,\varphi) \quad \text{for all} \quad \varphi \in S_r^h(\Omega) \tag{3}$$

or, on subtracting (3) from (2),

$$A(u-u_h,\varphi) \;=\; 0 \quad \text{for all} \quad \varphi \in S_r^h(\Omega). \tag{4}$$

Quasi–optimal L_∞ estimates on general quasi–uniform meshes for the finite element method were first proved by Natterer [3] and Scott [13] in 1975. These were followed by many other studies which refined and extended their results to more general situations (see for example [4], [5], [7], [8], [9], [10] and [11] to name a few). These estimates take the form

$$\|u-u_h\|_{L_\infty(\Omega)} \;\leq\; Ch\Big(\ln\frac{1}{h}\Big)^{\overline{r}} \inf_{\chi\in S_r^h} \|u-\chi\|_{W_\infty^1(\Omega)} \tag{5}$$

and

$$\|u-u_h\|_{W_\infty^1(\Omega)} \;\leq\; C \inf_{\chi\in S_R^h} \|u-\chi\|_{W_\infty^1(\Omega)}. \tag{6}$$

In (5), $\overline{r} = 1$ if $r = 2$ and $\overline{r} = 0$ if $r \geq 3$. The constants C in (5) and (6) are independent of u, u_h and h.

The results discussed here start with a slightly different point of view. They are based on the fact that part of all of the present proofs of the global L_∞ estimates have much in common with the proofs of local L_2 based error estimates, where cutoff functions are replaced by weight functions. The proofs in a sense are local in nature. Hence here we shall focus our attention not on the

$L_\infty(\Omega)$ or $W_\infty^1(\Omega)$ norm of the error but rather on the error at an arbitrary but fixed point x of $\overline{\Omega}$.

In order to describe our first results we shall need some notation. For each fixed point $x \in \overline{\Omega}$, real number s and arbitrary $y \in \mathbb{R}^N$ consider the weight function

$$\sigma_x^s(y) \;=\; \Big(\frac{h}{|x-y|+h}\Big)^s. \tag{7}$$

Notice that if $s > 0$ and $|x-y| = O(h)$ then $\sigma_x^s(y) = O(1)$. Furthermore $\sigma_x^s(y)$ is a decreasing function of $|x-y|$ and $\sigma_x^s(y) = O(h^s)$ when $|x-y| = O(1)$. For $1 \leq p \leq \infty$ and fixed x, consider the weighted norms

$$\|u\|_{L_p(\Omega),x,s} \;=\; \|\sigma_x^s(y)\,u(y)\|_{L_p(\Omega)} \tag{8}$$

and

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega),x,s} \;=\; \|u\|_{L_p(\Omega),x,s} + \|\nabla u\|_{L_p(\Omega),x,s}. \tag{9}$$

Notice that if $p = \infty$ and $s \doteq 0$, these weighted norms satisfy, for continuous u,

$$|u(x)| \;\leq\; \|u\|_{L_\infty(\Omega),x,s} \leq \|u\|_{L_\infty(\Omega)}, \tag{10}$$

and at points where $\nabla u(x)$ is continuous

$$|\nabla u(x)| \;\leq\; \|u\|_{W_\infty^1(\Omega),x,s} \leq \|u\|_{W_\infty^1(\Omega)}. \tag{11}$$

Our first result concerns the error of $(u-u_h)(x)$ at an arbitrary but fixed point $x \in \overline{\Omega}$, and may be roughly stated as follows: Let $x \in \overline{\Omega}$ and $0 \leq s \leq r-2$, then

$$|(u-u_h)(x)| \;\leq\; \|u-u_h\|_{L_\infty(\Omega),x,s} \leq Ch\Big(\ln\frac{1}{h}\Big)^{\overline{s}} \inf_{\chi\in S_r^h} \|u-\chi\|_{W_\infty^1(\Omega),x,s}. \tag{12}$$

Here $\overline{s} = 1$ if $s = r-2$, $\overline{s} = 0$ if $0 \leq s < r-2$, and C is independent of u, u_h and x.

It is easy to see that (12) is sharper than (5) when $r \geq 3$. In fact choosing $x \in \overline{\Omega}$ to be the point where $|(u-u_h)(x)| = \|u-u_h\|_{L_\infty(\Omega)}$ and using the inequality (11), it follows that (12) implies (5) when $0 < s < r-2$ but not vice versa. The estimate (12) gives new information about the behavior of the error at a fixed but arbitrary point $\overline{x} \in \Omega$. Because of the weighted norms on the right, it indicates a more local dependence of the error at x on the solution u in a neighborhood of x than is indicated by (5).

Let us briefly discuss the differences in the proofs of (5) and (12). The starting point that can be used for both is the representation

$$|(u-u_h)(x)| \;\leq\; |A(u-\chi, g^x - g_h^x)| \tag{13}$$

where g^x may be thought of as a "smoothed" Green's function with singularity at x, $g_h^x \in S_r^h(\Omega)$ is its finite element approximation, and $\chi \in S_r^h(\Omega)$ is arbitrary. So the problem reduces to obtaining estimates for $g^x - g_h^x$. An analogous approach has been used previously for obtaining pointwise estimates for finite difference methods and was also used by Scott [13] in analyzing the finite element method. The estimate (5) for the L_∞ norm follows by taking

$$\|u - u_h\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C\|u - \chi\|_{W_\infty^1(\Omega)} \sup_{x\in\overline{\Omega}} \|g^x - g_h^x\|_{W_1^1(\Omega)}$$

and showing that

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} \|g^x - g_h^x\|_{W_1^1(\Omega)} \leq Ch\Big(\ln\frac{1}{h}\Big)^{r}. \tag{14}$$

If one thinks of g^x as "almost" being in $W_1^2(\Omega)$ then (14) is reasonable from the point of view of approximation theory, in terms of powers of h. This type of estimate is in fact proved in all those papers using this approach. On the other hand if one thinks of the Green's function with singularity at x, its "nonsmooth" behavior occurs only at x. Away from x it satisfies a homogeneous elliptic equation, and hence not only is it smooth but its derivatives have very special decay properties as a function of inverse powers of the distance to the singularity. Thus we might hope that away from x, g^x may be approximated to order h^{r-1} in W_1^1 by using the fact that it is in W_1^r and then bound the r^{th} order derivatives in terms of inverse powers of the distance to x. This in fact can be done and we shall prove the weighted estimate

$$\|g^x - g_h^x\|_{W_1^1(\Omega),x,-s} \leq Ch\Big(\ln\frac{1}{h}\Big)^{\overline{s}} \tag{15}$$

where $0 \leq s \leq r-2$ and C is independent of h and x. The estimate (15) is in general stronger than (14). Interior pointwise error estimates for the Green's function for this problem were proved in Schatz and Wahlbin [9]. The estimate (12) now follows from (15) and (13) which can be estimated by

$$|(u - u_h)(x)| \leq C\|u - \chi\|_{W_\infty^1(\Omega),x,s} \|g^x - g_h^x\|_{W_1^1(\Omega),x,-s}.$$

There is an analogous result for pointwise error estimates for first derivatives which may be roughly stated as follows: Let $x \in \overline{\Omega}$ and $0 \leq s < r-1$, then

$$\|u - u_h\|_{W_\infty^1(\Omega),x,s} \leq C \inf_{\chi\in S_r^h} \|u - \chi\|_{W_\infty^1(\Omega),x,s}. \tag{16}$$

Here $C > 0$ is independent of u, u_h, h, and x.

In view of our previous discussion it is easily seen that (16) implies (6), for $0 < s < r-1$ but not *vice versa*. Hence (16) is sharper than (6) this time for

$r \geq 2$, and also because of the weighted norm on the right indicates a far more local dependence of derivatives of the error on u than is indicated by (6).

In this direction one consequence of the weighted estimates (12) and (16) are estimates that we shall call "error expansion inequalities". They show the local dependence of the error on u. There are many variations which are easily derived from (12) and (16). Here we shall present a special case of a general result. We begin with estimates for $(u - u_h)(x)$.

Suppose $r \geq 3$ and $u \in W_\infty^{2r-2}(\Omega)$ for some $0 < \varepsilon < 1$, then there exists a constant C independent of u, u_h, h and x such that

$$|(u - u_h)(x)| \leq C\Big(\ln\frac{1}{h}\Big)\Big(h^r \sum_{|\alpha|=r} |D^\alpha u(x)| + \cdots + h^{2r-3} \sum_{|\alpha|=2r-3} |D^\alpha u(x)| + h^{2r-2}\|u\|_{W_\infty^{2r-2}(\Omega)}\Big). \tag{17}$$

A corresponding estimate for derivatives is as follows: Suppose $r \geq 2$ and $u \in W_\infty^{2r-1}(\Omega)$, then given $0 < \varepsilon < 1$ there exists a constant C independent of u, u_h, h and x such that

$$|\nabla(u - u_h)(x)| \leq C\Big(h^{r-1} \sum_{|\alpha|=r} |D^\alpha u(x)| + \cdots + h^{2r-3} \sum_{|\alpha|=2r-2} |D^\alpha u(x)| + h^{2r-2-\varepsilon}\|u\|_{W_\infty^{2r-1}(\Omega)}\Big). \tag{18}$$

We remark that these inequalities may be trivially changed to equalities with the constants C replaced by functions $g(x, u, u_h, h) \geq 0$, which depend on x, u, u_h, and h such that $g(x, u, u_h, h) \leq C$ independent of x, u, u_h and h.

Notice that all the terms on the right except the last in (17) and (18) involve derivatives of u at only one point. We would like to emphasize again that these expansions are valid at any point of $\overline{\Omega}$ and for a large class of finite elements in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ and for equations of the form (1), (2). Other expansions will be given in forthcoming papers for different problems. With regard to other work, a more precise asymptotic expansion has been derived in Blum, Lin and Rannacher [1] for the special case of Dirichlet's Problem in the plane for $-\Delta u = f$ in Ω, $u = 0$ on $\partial\Omega$. Their expansions are valid at special points x on a "two regular grid" using piecewise linear elements. The approach used there is entirely different and seems not to easily generalize to more general situations.

We end this lecture by mentioning a consequence of the estimates (17) and (18). Very roughly stated, this says that if $D^\alpha u(x) = 0$ for all $|\alpha| = r$, then the rate of convergence for $r \geq 3$ of $(u - u_h)(x)$ is greater than h^r, and when

$r \geq 2$ the rate of convergence of $\nabla(u - u_h)(x)$ is greater than h^{r-1}. In a future publication we shall use local results of this type together with some additional ideas to obtain some new superconvergence and extrapolation results for the finite element method.

References

[1] H. Blum, Q. Lin and R. Rannacher, *Asymptotic error expansions and Richardson extrapolation for linear finite elements*, Numer. Math. **49** no. 1 (1986), 11–37.

[2] Ju. P. Krasovski, *Properties of Green's functions and generalized solutions of elliptic boundary value problems*, (translation of Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Tom. **184** (1969) no. 2), Soviet Math. Dokl. **10** no. 1 (1969), 54–119.

[3] F. Natterer, *Uber die punktweise Konvergenz finiter Elemente*, Numer. Math. **25** no. 1 (1975), 67–77.

[4] J. A. Nitsche, *L_∞ convergence of finite element approximations*, Journées "Elements finis", Univ. Rennes, Rennes, France, 1975, pp. 18.

[5] ———, *L_∞ convergence of finite element approximations*, in "Mathematical Aspects of Finite Element Methods" (Proc. Conf. CNR, Rome, 1975), Lecture Notes in Math., vol. 606, Springer–Verlag, 1977, pp. 261–274.

[6] J. A. Nitsche and A. H. Schatz, *Interior estimates for Ritz–Galerkin methods*, Math. Comp. **28** (1974), 937–958.

[7] R. Rannacher, *Zur L^∞–Konvergenz linearer finiter Elemente beim Dirichlet Problem*, Math. Z. **149** no. 1 (1976), 69–77.

[8] R. Rannacher and R. Scott, *Some optimal error estimates for piecewise linear finite element approximations*, Math. Comp. **38** no. 158 (1982), 437–535.

[9] A. H. Schatz and L. B. Wahlbin, *Interior maximum norm estimates for finite element methods*, Math. Comp. **31** no. 138 (1977), 414–442.

[10] ———, *Interior maximum norm estimates for finite element methods. Part II*, Math. Comp. **64** no. 211 (1995), 907–928.

[11] ———, *On the quasi–optimality in L_∞ of the $\mathring{H}^1$ projection into finite element spaces*, Math. Comp. **38** no. 157 (1982), 1–22.

[12] A. H. Schatz, I. Sloan and L. B. Wahlbin, *Superconvergence in the finite element method and meshes which are locally symmetric with respect to a point*, SIAM J. Numer. Anal. (to appear).

[13] R. Scott, *Optimal L^∞ estimates for the finite element method on irregular meshes*, Math. Comp. **30** no. 136 (1976), 681–697.

ALFRED H. SCHATZ
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
CORNELL UNIVERSITY
ITHACA, NY 14853
USA

Memorias III Escuela de Verano
Geometría Diferencial
Ecuaciones Diferenciales Parciales
y Análisis Numérico
Universidad de los Andes, 20 a 30 de junio de 1995
páginas 97–106

Un modelo bidimensional para flujos atmosféricos

ESTEBAN G. TABAK
New York University, USA

RESUMEN. Se describe un modelo bidimensional simplificado para flujos cuasi-geostróficos, que ha sido propuesto para el estudio de la turbulencia atmosférica, la formación de frentes en la atmósfera y el océano, y la formación de singularidades en las ecuaciones de Euler tridimensionales.

§1 Introducción

El estudio de flujos a gran escala en la atmósfera y el océano ha progresado enormemente en las últimas décadas, debido fundamentalmente a dos factores: el desarrollo de computadoras y métodos numéricos que permiten modelar estos flujos en forma razonablemente realista; y la aplicación exitosa de métodos de la matemática aplicada, en particular desarrollos asintóticos que permiten simplificar notablemente las ecuaciones que describen estos flujos, mediante el "filtrado" de las frecuencias altas.

El artículo presente, que se inscribe en esta segunda vertiente, describe un modelo asintótico simplificado para el estudio de flujos atmosféricos a gran escala en las latitudes medias. Por una coincidencia afortunada, las ecuaciones de este modelo resultan formalmente análogas a las ecuaciones de Euler tridimensionales, pero en un contexto bidimensional. Esto les brinda un valor adicional, ya que las convierte en una herramienta útil para el estudio de las ecuaciones de Euler. Al mismo tiempo, esta coincidencia formal convierte al modelo en un

ámbito ideal para que matemáticos formados en el estudio de las ecuaciones de Euler descubran las características más notables de los fluidos geofísicos.

Este trabajo se dirige particularmente a aquellos matemáticos, físicos e ingenieros interesados en el estudio de la atmósfera y el océano, pero sin una formación previa significativa en fluidos rotantes. Por ello, principios fundamentales, como el balance geostrófico, la preservación de la vorticidad potencial y el escalamiento cuasigeostrófico, son tratados con algún detalle. Se ha intentado enfatizar el contenido físico de estos principios, privilegiando derivaciones intuitivamente claras por sobre otras con un contenido más formal.

Tras esta introducción, se describen los ingredientes más importantes del modelo, que son también elementos básicos de los flujos geofísicos: el balance geostrófico, la vorticidad potencial, y el escalamiento cuasigeostrófico. Estos elementos se combinan luego, con el agregado de hipótesis simplificadoras, para dar lugar a un modelo bidimensional. La última sección describe brevemente la relación de este modelo con las ecuaciones de Euler en dos y tres dimensiones.

El modelo descrito fue propuesto por Blumen en [2] para el estudio de la turbulencia atmosférica. En este contexto, el modelo también fue utilizado por Pierrehumbert, Held, Swanson y Garner en [10] y [6]. Constantin, Majda y Tabak han estudiado su analogía con las ecuaciones de Euler tridimensionales en [4] y [5], y sus similitudes y diferencias con Euler bidimensional en [8].

§2 El balance geostrófico

En las latitudes medias, y para flujos atmosféricos en escalas grandes, del orden de miles de kilómetros y varios días, la aceleración de Coriolis, debida a la rotación de la Tierra, es muy superior a las otras componentes de la aceleración. Una forma conveniente de expresar esta diferencia de magnitud es en términos del número de Rossby

$$\varepsilon = \frac{U}{fL}, \tag{1}$$

donde U y L son escalas típicas de velocidad y longitud horizontales, y f es el doble de la componente vertical de la rotación de la Tierra en la latitud considerada. Al reescalar las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento horizontal obtenemos, en el límite cuando ε tiende a cero, el llamado "balance geostrófico"

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{f\rho} P_y \\ v &= \frac{1}{f\rho} P_x \end{aligned} \tag{2}$$

donde u y v son las componentes horizontales de la velocidad, P es la presión y ρ la densidad del aire. Nótese que (2) representa un balance entre la aceleración de Coriolis y el gradiente de presiones. Este balance tiene importantes

consecuencias. Por un lado, nos dice que, en una primera aproximación, la divergencia $u_x + v_y$ de las componentes horizontales de la velocidad se anula. Por otro, nos permite identificar la presión con la función de corriente Ψ. Esta identificación es sorprendente, ya que implica que los vientos dominantes son paralelos a las isobaras, en lugar de tomar la dirección del gradiente de presiones, intuitivamente más plausible.

Las ecuaciones en (2) nos permiten calcular las velocidades u y v si conocemos la distribución de presiones $P(x, y, z)$. Sin embargo, no hay nada en ellas que nos indique cómo este campo de presiones evoluciona en el tiempo. Para encontrar las ecuaciones que rigen dicha evolución, puede realizarse un desarrollo formal de las ecuaciones del movimiento en potencias de ε, e ir más allá del primer orden que hemos considerado hasta ahora. Este procedimiento, que puede verse, por ejemplo, en Pedlosky [9], da lugar a las denominadas "ecuaciones cuasigeostróficas". En este trabajo, sin embargo, preferimos dar una derivación más intuitiva de estas ecuaciones, en términos de la denominada "vorticidad potencial".

§3 La vorticidad potencial

El concepto de vorticidad potencial Q, debido a Ertel, es una generalización del de vorticidad, y se define de forma tal que Q se conserve a lo largo de la trayectoria de una partícula. En este sentido, la vorticidad potencial es análoga a la temperatura potencial θ, que generaliza la temperatura, y es también una constante para cada partícula en flujos adiabáticos.

La conservación de vorticidad potencial está ligada al teorema de Kelvin sobre preservación de la circulación. Recordemos que la circulación Γ del campo de velocidades u a lo largo de un circuito cerrado C se define como

$$\Gamma = \int_C u \cdot dr \tag{3}$$

Consideremos ahora un circuito $C(t)$ que se mueva con el fluido, de forma tal que conste siempre de las mismas partículas materiales. El teorema de Kelvin nos dice que, tanto para flujos incompresibles como para flujos barotrópicos, en que la presión depende sólo de la densidad, la circulación Γ a lo largo de tal circuito $C(t)$ es una constante. Es importante notar que el teorema es válido incluso para flujos no barotrópicos, siempre que la presión sea una función sólo de la densidad a lo largo de C. En particular, supongamos que la presión dependa de la densidad y la temperatura potencial:

$$p = P(\rho, \theta) \tag{4}$$

Consideremos un circuito C trazado sobre una superficie S con temperatura potencial θ constante. A lo largo de tal circuito, p es función sólo de ρ. Más aún, como θ no cambia a lo largo de la trayectoria de una partícula, las partículas

de $C(t)$ tendrán siempre el mismo valor de θ, y el teorema de Kelvin resultará válido. Es esta versión "débil" del teorma de Kelvin la que nos interesa.

Recordemos que la vorticidad ω es el rotor del campo de velocidades. Por consiguiente, por el teorema de Stokes, la circulación Γ de u a lo largo de C coincide con la integral del flujo normal de ω a través de cualquier superficie Ω que tenga C por perímetro. En particular, como C yace en la superficie S, podemos tomar Ω como el interior de C en esta superficie. Con esta elección, el teorema "débil" de Kelvin adopta la expresión

$$\int_{\Omega(t)} \omega_n \, dS \;=\; \text{constante}, \tag{5}$$

donde ω_n es la componente de la vorticidad perpendicular a la superficie S o, en otros términos, la proyección de la vorticidad sobre el gradiente de θ. Por consiguiente, si el área de $\Omega(t)$ disminuye, ω_n debe aumentar proporcionalmente. Nuestro siguiente paso será relacionar esta contracción local de $\Omega(t)$ con un estiramiento del fluido en la dirección normal a la superficie S.

Para ello, consideremos ahora dos superficies muy cercanas, correspondientes a dos valores de θ muy próximos, y un pequeño segmento de tubo cuyas secciones extremas se encuentren sobre dichas dos superficies. Si el área de estas secciones es Ω, y la distancia entre las superficies Δz, el volumen del tubo estará dado aproximadamente por $V = \Omega \Delta z$, y por lo tanto su masa será $M = \rho V = \rho \Omega \Delta z$, donde ρ es la densidad local del fluido. Si movemos el tubo con el fluido, de forma que esté formado siempre por las mismas partículas, su masa no cambiará, y sus secciones extremas seguirán ubicadas sobre superficies con los mismos valores de θ. Por el teorema de Kelvin, Ω variará en forma inversamente proporcional a ω_n. La distancia entre las superficies Δz es inversamente proporcional al gradiente de θ, ya que los valores extremos de θ permanecen fijos. Por consiguiente, la masa del tubo estará dada por

$$M \;=\; \rho \Omega \Delta z \;\sim\; \frac{\rho}{\omega_n |\nabla \theta|} \;=\; \frac{\rho}{\omega \cdot \nabla \theta} \tag{6}$$

y por consiguiente la cantidad

$$Q \;=\; \frac{\omega \cdot \nabla \theta}{\rho} \tag{7}$$

debe ser una constante para cada partícula:

$$\frac{dQ}{dt} \;=\; 0, \tag{8}$$

donde d/dt denota diferenciación total a lo largo de la trayectoria de una partícula

$$\frac{d}{dt} \;=\; \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla$$

Esta cantidad Q es la denominada "vorticidad potencial".

§4 Escalamiento cuasigeostrófico

La preservación de la vorticidad potencial es la restricción adicional que estábamos buscando sobre la evolución temporal de un flujo en balance geostrófico. Para entender sus efectos, sin embargo, debemos reescalar las ecuaciones, desarrollando las variables en potencias del número de Rossby ε. Los ingredientes básicos de dicho escalamiento, que aquí sólo esbozaremos (ver [9] para un tratamiento más detallado), son la rotación rápida de la Tierra, la casi bidimensionalidad de los flujos atmosféricos, y la estratificación vertical de la atmósfera.

De dichos ingredientes se desprende, en primer lugar, que podemos limitarnos a considerar las componentes verticales de los vectores en el numerador de (7). En particular, la vorticidad ω está dada aproximadamente por la suma de dos veces la componente vertical de la velocidad angular de la Tierra f y la vorticidad vertical relativa ξ:

$$\omega \;=\; (f + \varepsilon \xi)\vec{k}, \tag{9}$$

donde ε es el número de Rossby, y $\vec{k}$ es el versor vertical. Para un fluido estratificado, por otra parte, la densidad y la temperatura potencial están dadas por la suma de su valor en equilibrio y una perturbación que depende del movimiento:

$$\rho \;=\; \rho^0 + \varepsilon \rho^1 \tag{10}$$

$$\theta \;=\; \theta^0 + \varepsilon \theta^1 \tag{11}$$

Aquí hemos adoptado el mismo ε para la estratificación que para la relación entre vorticidades, de forma que ambos efectos aparezcan en las ecuaciones finales. Introduciendo (9), (10) y (11) en la definición de vorticidad potencial (7), obtenemos

$$Q \;=\; \frac{\omega \cdot \nabla \theta}{\rho} \;\sim\; \frac{f \, {\theta^0}_z}{\rho^0} \left[1 + \varepsilon \left(\frac{\xi}{f} + \frac{{\theta^1}_z}{{\theta^0}_z} - \frac{{\rho^1}_z}{{\rho^0}_z} \right) \right] \tag{12}$$

Tanto ξ como θ y ρ en (14) pueden expresarse en términos de la función de corriente Ψ. Para ω_r, esto es una consecuencia de la igualdad

$$\xi \;=\; v_y - u_x \;=\; \Psi_{xx} + \Psi_{yy} \;=\; \Delta_2 \Psi, \tag{13}$$

donde Δ_2 representa el Laplaciano bidimensional. Para ρ y θ, la relación con la función de corriente surge del balance hidrostático, ya que ambas son proporcionales a la derivada vertical de la presión, y la presión lo es a la función de corriente, debido al balance geostrófico (2). Si, por simplicidad, consideramos una situación en la que f es constante, lo que corresponde a no incorporar en

el modelo la variación de la fuerza de Coriolis con la latitud, y adoptamos una atmósfera estratificada exponencialmente, obtenemos, para la parte variable de la vorticidad potencial, después de reescalar las variables independientes x, y y z, la expresión

$$Q = \Delta_3 \Psi, \tag{14}$$

donde Δ_3 representa el Laplaciano tridimensional $\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$. El principio de conservación de la vorticidad potencial (8) adopta, en este contexto casi bidimensional, la forma

$$Q_t + u Q_x + v Q_y = 0, \tag{15}$$

donde $u = -\Psi_y$ y $v = \Psi_x$.

§5 Clausura de un modelo bidimensional

Las ecuaciones (14) y (15), con condiciones iniciales y de contorno adecuadas, describen la evolución del campo de velocidades en una escala cuasigeostrófica. En particular, es necesario especificar condiciones de contorno en la superficie de la Tierra $z = 0$. Para ello, consideremos la temperatura potencial θ. Como mencionamos en la sección anterior, la temperatura potencial es proporcional a la derivada vertical de la presión y, por consiguiente, también de la función de corriente:

$$\theta = \Psi_z \tag{16}$$

Por otro lado, para flujos adiabáticos, la temperatura potencial asociada a cada partícula es una constante del movimiento. De ahí que, en $z = 0$,

$$\theta_t + u \theta_x + v \theta_y = 0. \tag{17}$$

Las ecuaciones (16) y (17) actúan como condición de contorno para Ψ en $z = 0$.

Notemos que, si la vorticidad potencial se anula inicialmente, lo hará siempre, en virtud de (15). Esto sugiere adoptar $Q = \Delta_3 \Psi = 0$ como hipótesis de clausura para un modelo simplificado, consistente en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \Delta_3 \Psi & \text{para } z > 0 \\ \theta_t + \nabla^\perp \Psi \cdot \nabla \theta = 0 & \text{en } z = 0 \\ \theta = \Psi_z & \text{en } z = 0 \\ \Psi_z \to 0 & \text{cuando } z \to \infty, \end{cases} \tag{18}$$

donde $\nabla^\perp$ denota el vector

$$\nabla^\perp = \begin{pmatrix} -\partial_y \\ \partial_x \end{pmatrix}$$

En este modelo, las únicas ecuaciones de evolución son las dadas en la frontera $z = 0$, pero éstas involucran derivadas tanto horizontales como verticales

de Ψ. Para relacionarlas, debemos recurrir a la ecuación que satisface Ψ en el interior del dominio $z > 0$. Sin embargo, no resulta necesario para ello calcular la solución completa en el interior; la transformación de Ψ a Ψ_z (de datos de Dirichlet a datos de Neumann) puede calcularse mediante un operador integral en la frontera. En efecto, si Ψ satisface la ecuación de Laplace en $z > 0$, decae en $z = \infty$, y sus valores en $z = 0$ están dados por

$$\Psi(x, y, 0) = \int a(k, l) e^{i(kx + ly)} \, dk \, dl, \tag{19}$$

donde $a(k, l)$ es la tranformada de Fourier de $\Psi(x, y, 0)$, entonces $\Psi(x, y, z)$ admite la representación integral

$$\Psi(x, y, z) = \int a(k, l) e^{i(kx + ly) - \sqrt{k^2 + l^2} z} \, dk \, dl, \tag{20}$$

de donde deducimos que $\Psi_z(x, y, 0)$ está dada por

$$\Psi_z(x, y, 0) = -\int \sqrt{k^2 + l^2} a(k, l) e^{i(kx + ly)} \, dk \, dl. \tag{21}$$

En otras palabras, las funciones $\Psi(x, y, 0)$ y $\Psi_z(x, y, 0)$ están relacionadas por el operador

$$\Psi_z(x, y, 0) = -(-\Delta_2)^{1/2} \Psi(x, y, 0), \tag{22}$$

cuya representación en el espacio de Fourier es

$$\widehat{\Psi_z} = -|k| \widehat{\Psi}, \tag{23}$$

donde $|k| = \sqrt{k^2 + l^2}$.

Con esta transformación, la evolución de Ψ y θ en la frontera $z = 0$ del modelo (18) puede formularse sin ninguna referencia al interior del dominio, de forma puramente bidimensional:

$$\theta_t + u \cdot \nabla \theta = 0, \tag{24}$$

donde

$$u = \nabla^\perp \Psi \tag{25}$$

y

$$\theta = -(-\Delta)^{1/2} \Psi, \tag{26}$$

donde Δ representa el Laplaciano bidimensional.

§6 Similaridades con las ecuaciones de Euler en dos y tres dimensiones

Las ecuaciones (24), (25) y (26) del modelo cuasigeostrófico bidimensional son formalmente análogas a las ecuaciones de Euler bidimensionales, escritas en términos de la vorticidad ω:

$$\omega + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \omega \;=\; 0\,, \tag{27}$$

donde

$$\boldsymbol{u} \;=\; \nabla^{\perp} \Psi \tag{28}$$

y

$$\omega \;=\; \Delta \Psi\,. \tag{29}$$

En (24), la temperatura potencial θ es análoga a la vorticidad ω en (27). Ambas son cantidades escalares asociadas a cada partícula que, al desplazarse, no lo hacen en forma pasiva, sino que afectan el campo de velocidades, representado por la función de corriente Ψ. En este sentido, son dos ejemplos de lo que se denomina "escalares activos" [3]. La diferencia entre ambos está en la forma de la relación entre el escalar activo y la función de corriente, que está en un caso dada por un operador local, el Laplaciano, y en el otro por uño no local, su raíz cuadrada.

La analogía entre el modelo cuasigeostrófico y las ecuaciones de Euler bidimensionales ha sido explorada en detalle en [8]. La principal diferencia entre ambos modelos surge al considerar el estiramiento de filamentos, que puede describirse mediante ecuaciones de evolución para los gradientes de θ y ω, que se obtienen al diferenciar (24) y (25):

$$\frac{d}{dt} \nabla^{\perp} \theta \;=\; \nabla^{\perp} \theta \cdot \nabla u \tag{30}$$

y

$$\frac{d}{dt} \nabla^{\perp} \omega \;=\; \nabla^{\perp} \omega \cdot \nabla u\,. \tag{31}$$

Pese a que ambas ecuaciones lucen formalmente idénticas, su diferencia estriba en la expresión de la "matriz de deformación" ∇u como función de $\nabla^{\perp}\theta$ y $\nabla^{\perp}\omega$ respectivamente:

$$\nabla u(x) \;=\; -P.V. \int \nabla^{\perp} \theta(x+y) \otimes \nabla \left(\frac{1}{|y|} \right) dy \tag{32}$$

y

$$\nabla u(x) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int \nabla^{\perp} \omega(x+y) \otimes \nabla (\log |y|) dy\,. \tag{33}$$

La relación entre ambas variables está dada, en el caso cuasigeostrófico, por una integral singular y, para las ecuaciones de Euler bidimensionales, por una convolución con un núcleo localmente integrable. Esto hace que el estiramiento de filamentos tenga una realimentación local no lineal mucho más fuerte en el modelo cuasigeostrófico. Es posible, incluso, que este modelo desarrolle singularidades en tiempo finito (ver [4]); las ecuaciones de Euler bidimensionales, en cambio, no desarrollan singularidades.

Las ecuaciones (30) y (32) sugieren una analogía más profunda entre el modelo cuasigeostrófico bidimensional y las ecuaciones de Euler tridimensionales. En efecto, estas últimas adoptan la forma

$$\frac{d\omega}{dt} \;=\; \omega \cdot \nabla \boldsymbol{u}\,, \tag{34}$$

donde ω es el vector vorticidad, y la relación entre $\nabla \boldsymbol{u}$ y ω está dada por un operador integral singular. Esta analogía ha sido tratada en detalle en [5], por lo que no nos extenderemos aquí sobre ella. Mencionaremos tan sólo que la existencia de tal analogía da un valor nuevo al modelo cuasigeostrófico, que se convierte en una herramienta para el estudio de las ecuaciones de Euler tridimensionales. En particular, se ha propuesto en [5] utilizarlas para investigar si las ecuaciones de Euler tridimensionales desarrollan singularidades en tiempo finito, un problema teórico importante en el estudio de la turbulencia (ver, por ejemplo, [1] y [7]). Curiosamente, las singularidades conjeturadas para el modelo cuasigeostrófico corresponden, en el contexto geofísico, a la formación de frentes entre masas de aire frío y caliente en la atmósfera, denominada "frontogénesis".

§7 Agradecimientos

Quisiera agradecer muy especialmente a los organizadores de la Escuela de Verano por la oportunidad de participar en ella. Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el subsidio de la National Science Foundation DMS-9501073.

Referencias

[1] T. Beale, T. Kato and A. Majda, *Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations*, Comm. Math. Phys. **94** no. 1 (1984), 61–66.

[2] W. Blumen, *Uniform potential vorticity flow. Part I. Theory of wave interactions and two-dimensional turbulence*, J. Atmospheric Sci. **35** (1978), 774–783.

[3] P. Constantin, *Geometric Statistics in Turbulence*, SIAM Rev. **36** no. 1 (1994), 73–98.

[4] P. Constantin, A. J. Majda and E. G. Tabak, *Singular front formation in a model for quasigeostrophic flow*, Phys. Fluids A **6** no. 1 (1994), 9–11.

[5] ———, *Formation of strong fronts in the 2-D quasigeostrophic thermal active scalar*, Nonlinearity **7** no. 6 (1994), 1495–1533.

[6] I. M. Held, R. T. Pierrehumbert, S. T. Garner and K. L. Swanson, *Surface quasi-geostrophic dynamics*, J. Fluid Mech. **282** (1995), 1–20.

[7] R. M. Kerr, *Evidence for a singularity of the three-dimensional incompressible Euler equations*, Phys. Fluids A **5** no. 7 (1993), 1725–1746.

PUBLICACIONES DE LA ACADEMIA COLOMBIANA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

COLECCION JORGE ALVAREZ LLERAS

Volumen 1 - **Mora-Osejo, L.E.** 1987. Estudios morfológicos, autoecológicos y sistemáticos en Angiospermas. 1/16. 196 pp, 75 figs.

Volumen 2 - **Murillo, M.T. & M.A. Harker.** 1990. Helechos y plantas afines de Colombia. 1/16. 326 pp, 145 figs.

Volumen 3 - **Lozano Contreras, G.** 1994. Las Magnoliaceae del Neotrópico 1/16 148 pp, 57 figs.

Volumen 4 - **Eslava, J.** Aspectos relacionados con la erupción del volcán Nevado del Ruiz. 1/16 174 pp, 46 figs.

Volumen 5 - **Rocha Campos Marta.** Diversidad en Colombia de los Cangrejos del género *Neostrengeria*. 1/16 IV + 144 pp, 47 figs.

Volumen 6 - **Mora-Osejo, L. E. & Sturm Helmut.** 1994. Estudios Ecológicos del Páramo y del bosque altoandino. Cordillera Oriental de Colombia. Tomos I y II. 716 pp, 190 figs.

Volumen 7 - **Díaz, J. M.; Garzón-Ferreira J. & Zea Sven.** 1995. Los arrecifes coralinos de la Isla de San Andrés, Colombia: estado actual y perspectivas para su conservación. 1/16. 152 pp, 15 figs, 27 tablas y 15 láminas a color.

Volumen 8 - **Eslava Ramirez, J.A.** 1995. Régimen de la presión atmosférica en Colombia. 1/16. 152 pp, 94 figs, 59 tablas.

Volumen 9 - **John Ch. Donato Rondón, Luz Estela González G. & Claudia Liliana Rodríguez M.** Ecología de dos Sistemas Acuáticos de Páramo. 1/16. 168 pp, 53 figs, 14 tablas, 9 fotografías.

Volumen 10 - **Andrade-C. M.G., G. Amat & F. Fernández** (Eds.). Insectos de Colombia - Estudios Escogidos (Próximo en aparecer).

COLECCION ENRIQUE PEREZ ARBELAEZ

Volumen 1 - Memorias del Seminario en conmemoración del Centenario de Erwin Schrödinger. 1/16. 221 pp.

Volumen 2 - **Díaz, S. & A. Lourteig.** 1989. Génesis de una Flora. 1/16. xii. + 362 pp, 35 figs.

Volumen 3 - **Cubillos, G., F.M. Poveda & J.L. Villaveces.** 1989. Historia Epistemológica de la Química. 1/16. 128 pp.

Volumen 4 - **Hernández de Alba, G. & A. Espinosa.** 1991. Tratados de Minería y Estudios Geológicos de la época Colonial, 1616-1803. 1/16 xii + 92 pp, 1 fig.

Volumen 5 - **Díaz-Piedrahita, S.** (Editor) 1991. José Triana, su vida, su obra y su época. 1/16 Viii + 188 pp, 73 figs.

Volumen 6 - **Díaz-Piedrahita, S.** 1991. La Botánica en Colombia, hechos notables en su desarrollo. 1/16 x + 126 pp, 30 figs.

Volumen 7 - **Mantilla, L.C. & S. Díaz-Piedrahita.** 1992. Fray Diego García, su vida y su obra científica en la Expedición Botánica. 1/16 xv + 284, 14 figs.

Volumen 8 - **Arias de Greiff, J.** 1993. Historia de la Astronomía en Colombia. 1/16 200 pp, 23 figs.

Volumen 9 - **Lértora Mendoza, C.A.** 1995. Fuentes para el estudio de las ciencias exactas en Colombia. 1/16. 316 pp.

Volumen 10 - **Gauss, C. F.** 1995. Disquisitiones Arithmeticae. Traductores: Hugo Barrantes Campos, Michael Josephy, Angel Ruiz Zúñiga. 1/16. 540 pp.

COLECCION JULIO CARRIZOSA VALENZUELA

Volumen 1 - **Castillo, G.** 1992. Física Cuántica, teoría y aplicaciones. Tomo primero. 1/16 xxxii + 410, 77 figs.

Volumen 2 - **Bernal de Ramírez, I.** 1993. Análisis de Alimentos. 1/16 XVIII + 314 pp, 28 figs.

Volumen 3 - **Castillo, G.** 1994. Física Cuántica, teoría y aplicaciones. 1/16. Tomo segundo.

Volumen 4 - **Cáceres, D.** (Editor). 1995. Creando ciencia Crean docencia. 1/16.

Volumen 5 - **Romero, G. M. & L. H. Blanco.** 1996. Tópicos en Química Básica. 1/16. 240 pp, 56 figs.

Volumen 6 - **Peña G. & M. Pinto,** 1996. Mamíferos más comunes en sitios precerámicos de la sabana de Bogotá. 1/16 98 pp, 1 mapa, 6 dibujos a color, 18 láminas y 48 gráficas.

COLECCION MEMORIAS

Volumen 1 - Memorias del Seminario Nacional "El quehacer teórico y las perspectivas holista y reduccionista 1/16. VIII + 184 pp.

Volumen 2 - Memorias del Seminario Konrad Lorenz sobre Etología. 1/16 IV + 38 pp.

Volumen 3 - Memorias del Seminario Taller sobre Alta Montaña Colombiana. 1/16. 116 pp.

Volumen 4 - Memorias del Primer Congreso Nacional de Neurocomputación. 1/16. XIV + 184 pp.

Volumen 5 - Memorias del Primer Congreso Nacional de sobre Cambio Climático. 1/16. 136 pp., 9 figs.

Volumen 6 - Memorias del Primer Coloquio sobre Ciencia, Tecnología y Cultura. 1/16. 210 pp.

Volumen 7 - Memorias Tercera Escuela de Verano en Geometría Diferencial, Ecuaciones Diferenciales Parciales y Análisis Numérico. 1/16. 136 pp.

Las anteriores publicaciones pueden ser solicitadas directamente a la Academia,
Apartado **44763**, Santafé de Bogotá, D.C., o Fax **(571) 2838552**.
E.Mail accefyn@colciencias.gov.co
Se ofrecen en venta o mediante intercambio por publicaciones similares.